

O magickom štvorci IXOHOXI

Zdenko Takáč - Marián Trenkler

V starých jazykoch (napr. latinčine a hebrejčine) sa používali na označovanie cifier písmena a na označovanie čísel kombinácie písmen. Toto viedlo ľudí k tomu, aby sa snažili vysvetľovať jednotlivé texty prostredníctvom čísel, ktoré vyjadrovali. Známe sú práce židovských učencov, ktoré boli spracované v Kabale. Starovekí vedci boli fascinovaní tajomnými tabuľkami čísel, ktoré ich neraz inšpirovali v ich práci. Známe sú pokusy alchymistov o vytvorenie zlata z olova, ktoré boli inšpirované magickými štvorcami. Aj keď sa dnes často s úsmevom dívame na ich prácu musíme si uvedomiť, že v ich dobe to boli vedci, ktorí na svoje konanie mali racionálne dôvody. Mnoho zaujímavých faktov sa nachádza v knihe docenta chémie Karlovej univerzity Vladimíra Karpenka Tajemství magických čtverců [3]. Známe sú pokusy alchymistov inšpirované magickými štvorcami. Ešte aj dnes sa stretávame s tým, že niektoré hnutia sú spájané s istými tajomnými číslami.

Na označovanie rímskych číslíc sa používali písmena. Ak sa pozorne pozriete na rímske čísla I, V, X, C, M, D, tak môžete zistiť, že tieto symboly majú aspoň jednu os súmernosti (neplatí len pre symbol L). Toto viedlo ľudí, aby študovali symetrie rímskych čísel. Na obrázku 1 je nakreslená tabuľka, v ktorej sa nachádzajú všetky štvorice vytvorené zo symbolov I, X. Niektoré štvorice vyjadrujú rímske čísla, iné vyjadrujú rímske čísla, keď tabuľku otočíme alebo preklopíme podľa vertikálnej alebo horizontálnej osi tabuľky.

XXIX	IIII	XIXX	IXXI
XIXI	IXXX	XXII	IIIX
IXII	XIIX	II XI	XXXX
IIXX	XXII	IXIX	XIII

Obrázok 1

V tabuľke, ktorá je známa pod názvom IXOHOXI, sú aj iné zaujímavé súvislosti. Tieto súvislosti budú zvýraznené, keď nahradíme každý symbol X číslicou 8 a každý symbol I číslicou 1. Touto náhradou dostaneme štvorec, v ktorom sú všetky štvorciferné čísla vytvorené pomocou cifier 1 a 8 (obrázok 2). Ak sčítame štvorice čísel v ľubovoľnom riadku, stĺpci alebo oboch diagonálach dostaneme súčet 19 998. Takéto tabuľky sa v literatúre nazývajú *magické štvorce*. Túto vlastnosť si štvorec zachová, aj keď ho otočíme okolo stredu o 180 stupňov

preklopíme podľa vertikálnej alebo horizontálnej osi. Geometrické vlastnosti tajomného štvorca IHOHOXI sa stali predmetom záujmu už v časoch Rímskej ríše a fascinujú ľudí dodnes.

V tejto práci sa pozrieme na štvorec IXOHOXI očami matematika. Poukážeme na niektoré číselne vlastnosti tejto tajomnej tabuľky a ich zovšeobecnenia, pričom vynechávame dôkazy uvedených tvrdení.

8818	1111	8188	1881
8181	1888	8811	1118
1811	8118	1181	8888
1188	8881	1818	8111

Obrázok 2

Ak nahradíme v tabuľke na obrázku 2 číslice 8 číslicou 0 dostaneme čísla vyjadrené v dvojkovej sústave (doplnené o potrebný počet núl vľavo, tak aby všetky čísla boli štvorciferné). V tabuľke sa budú nachádzať čísla 0,1,2,...,15 vyjadrené v dvojkovej číselnej sústave (obrázok 3). Ak sa pozorne pozriete na túto tabuľku, tak zistíte, že na každej cifernej pozícii sa v každom riadku, každom stĺpci a oboch diagonálach nachádzajú práve dve jednotky a dve nuly. Z toho faktu vyplýva, že ak si všetky jednotky nahradíme inou číslicou a podobne nahradíme aj všetky nuly dostaneme také čísla, ktorých súčet vo všetkých riadkoch, stĺpcoch a oboch diagonálach je rovnaký. Ak jednotky a nuly nahradíme dvojicou čísel z množiny {6, 8, 9} dostaneme magický štvorec rádu 4, ktorý ostane magickým štvorcom aj po otočení o 180 stupňov. Iným zaujímavým využitím rovnosti počtu jednotiek a núl na jednotlivých pozíciách je to, že umožňuje vytvorenie tabuľky 4x4, v ktorej sa nachádza 16 navzájom rôznych čísel, pričom ich súčin v každom riadku, stĺpci a diagonále je rovnaký. Takáto tabuľka (je nakreslená na obrázku 4) sa nazýva súčinový magický štvorec. Postup, ako takúto tabuľku vytvoríme je uvedené v práci [5].

0010	1111	0100	1001
0101	1000	0011	1110
1011	0110	1101	0000
1100	0001	1010	0111

Obrázok 3

4	120	3	10
15	2	20	24
40	12	30	1
6	5	8	60

Obrázok 4

Doposiaľ sme sa zaoberali niektorými vlastnosťami magického štvorca rádu 4 (tabuľka pozostávajúca z 4x4 štvorčekov. Matematik si pri štúdiu vlastností štvorca IXOHOXI môže položiť nasledujúce otázky:

1. Existuje aj štvorec iného rádu, ktorý má niektoré rovnaké vlastnosti ako štvorec IXOHOXI ?
2. Existuje priestorová analógia štvorca IXIHOXI ?

Odpoveď na prvú otázku je kladná. Vychádzajúc z konštrukcie uvedenej v [4] vyplýva, že pre každé n , ktoré je prirodzenou mocninou čísla 2 existuje analógia štvorca IXOHOXI. Konštrukcia je analogická ako v priestorovom prípade.

Aj odpoveď na druhú otázku je kladná. Na obrázku 5 sú štyri vrstvy magickej kocky rádu 4. Táto kocka sa skladá z 4x4x4 malých kociek, v ktorých sú vpísané čísla 0, 1, 2, ..., 62, 63. Ak spočítate štyri čísla v ľubovoľnom riadku, stĺpci, tráme alebo jednej zo štyroch telesových uhlopriečok dostanete súčet 132. (Číslo 0 sa nachádza v riadku, ktorý je vytvorený z kociek s číslami 0,62,61,3, v stĺpci 0,59,55,12 a tráme 0,47,31,48.)

0	62	61	3
59	5	6	56
55	9	10	52
12	50	49	15

47	17	18	44
20	42	41	23
24	38	37	27
35	29	30	32

31	33	34	28
36	26	25	39
40	22	21	43
19	45	46	16

48	16	13	51
11	53	54	8
7	57	56	4
60	2	1	63

Obrázok 5

Táto kocka je zostrojená podľa nasledujúceho vzorca. Symbolom $m_n(i,j,k)$ je označený prvok kocky, ktorý je v i -tom riadku, j -tom stĺpci a k -tom tráme. Vo vzorci sme použili nasledujúce označenie: Symbolom $x \bmod n$ označujeme v matematike celočíselný zvyšok čísla x po delení číslom n a čítame x modulo n . Symbol x s pruhom označuje číslo n^3+1-x a $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo menšie alebo rovné číslu x .

Ak $n \equiv 0 \pmod{4}$, tak

$$\mathbf{m}_n(i, j, k) = \begin{cases} (i-1)n^2 + (j-1)n + k - 1 & \text{ak } \mathbb{F}(i, j, k) = 1, \\ (\bar{i}-1)n^2 + (\bar{j}-1)n + \bar{k} - 1 & \text{ak } \mathbb{F}(i, j, k) = 0, \end{cases}$$

kde

$$\mathbb{F}(i, j, k) = (i + \lfloor \frac{2i-1}{n} \rfloor + j + \lfloor \frac{2j-1}{n} \rfloor + k + \lfloor \frac{2k-1}{n} \rfloor) \pmod{2}$$

Na obrázku 6 sú štyri vrstvy, v ktorých sú čísla vyjadrené v dvojkovej sústave.

000000	111110	111101	000011
111011	000101	000110	111000
110111	001001	001010	110100
001100	110010	110001	001111

1.VRSTVA

101111	010001	010010	101100
010100	101010	101001	010111
011000	100110	100101	011011
100011	011101	011110	100000

2.VRSTVA

011111	100001	100010	011100
100100	011010	011001	100111
101000	010110	010101	101011
010011	101101	101110	010000

3.VRSTVA

110000	001110	001101	110011
001011	110101	110110	001000
000111	111001	111010	000100
111100	000010	000001	111111

4.VRSTVA

Obrázok 6

Ak čísla 0 a 1 nahradíme symbolmi **X** a **I**, tak dostaneme kocku, ktorá je priestorovou analógiou štvorca IXOHOXI. Štyri vrstvy takejto kocky sú nakreslené na nasledujúcom obrázku.

XXXXXX	IIIIIX	IIIIIXI	XXXXXI
IIIXII	XXXIXI	XXXIIX	IIIXXX
IIXIII	XXIXXI	XXIXIX	IIXIXX
XXIIXX	IIXXIX	IIXXXI	XXIIII

1.VRSTVA

IXIIII	XIXXXI	XIXXIX	IXIIXX
XIXIXX	IXIXIX	IXIXXI	XIXIII
XIIXXX	IXXIIIX	IXXIXI	XIIXII
IXXXII	XIIIXI	XIIIXX	IXXXXX

2.VRSTVA

XIIIII	IXXXXI	IXXXIX	XIIIXX
IXXIXX	XIIXIX	XIIXXI	IXXIII
IXIXXX	XIXIIX	XIXIXI	IXIXII
XIXXII	IXIIXI	IXIIXX	XIXXXX

3.VRSTVA

IIXXXX	XXIIIX	XXIIXI	IIXXII
XXIXII	IIXIXI	IIXIIX	XXIXXX
XXXIII	IIIXXI	IIIXIX	XXXIXX
IIIXXX	XXXXIX	XXXXXI	IIIIII

4.VRSTVA

Magickú kocku rádu 4 sme vytvorili použitím vyššie uvedeného vzorca. Z vyjadrenia magickej kocky v dvojkovej sústave môžeme vytvoriť súčinovú magickú kocku. Nech $abcdef$ je vyjadrenie prvku $m(i,j,k)$ magickej kocky rádu 4 v dvojkovej sústave. Ak si zvolíme šesticu čísel 2,3,4,5,7,9, tak do malej kocky so súradnicami (i,j,k) dáme číslo $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 5^d \cdot 7^e \cdot 9^f$ a dostaneme súčinovú magickú kocku rádu 4, ktorej štyri vrstvy sú nakreslené na obrázku 8.

1	840	1080	63
1512	45	35	24
1890	36	28	30
20	42	54	1260

1.VRSTVA

2520	27	21	40
15	56	72	945
12	70	90	756
126	540	420	2

2.VRSTVA

3780	18	14	60
10	84	108	630
8	105	135	504
189	360	280	3

3.VRSTVA

6	140	180	378
252	270	210	4
315	216	168	5
120	7	9	7560

4.VRSTVA

Obrázok 8

Použitý vzorec je na konštrukciu magických kociek rádu $4k$ pre všetky prirodzené čísla k . Ak k je mocninou čísla 2, tak vyjadrením prvkov kocky v dvojkovej sústave získame rôzne IXOHOXI kocky.

V tomto príspevku sme uviedli niektoré fakty bez dôkazov. Tieto budú uvedené v pripravovanej práci. Cieľom príspevku je poskytnúť námety na odbornú a aj vedeckú prácu študentom rôznych typov škôl.

Literatúra

- [1] CULLINANE, S. H.: *Geometry of the 4x4 Square*. 2004.
<http://log24.com/notes/geometry.html>
- [2] HARVEY, D. H.: *More Magic Squares*. 2002.
<http://www.geocities.com/harveyh/moremsqrs.htm>
- [3] KARPENKO, V.: *Tajemství magických čtverců*. Půdorys, Praha 1997.
- [4] TRENKLER, M.: *Konštrukcia magických p-rozmerných kociek*.
Obzory matematiky, fyziky a astronómie 2/2000, s. 19-29.
- [5] TRENKLER, M.: *Súčinové magické štvorce a kocky*.
Obzory matematiky, fyziky a informatiky 1/2002 (31), s.1-8.