

# Toky v sieti

**Rezová množina**  $X_A$  v grafe je množina všetkých hrán z  $X$ , ktorých jeden koncový vrchol je z  $A$ , druhý koncový vrchol nie je z  $A$ .

## Algoritmus zostrojenia cesty s maximálnou kapacitou

I° Vytvoríme rezovú množinu medzi vrcholmi  $u, v$  v  $X_r$  a určíme

$$\text{hodnotu } K = \max_{h \in X_R} \{o(h)\}$$

II° V uvažovanom grafe skrátíme všetky hrany, pre ktoré platí

$$o(h) \geq K$$

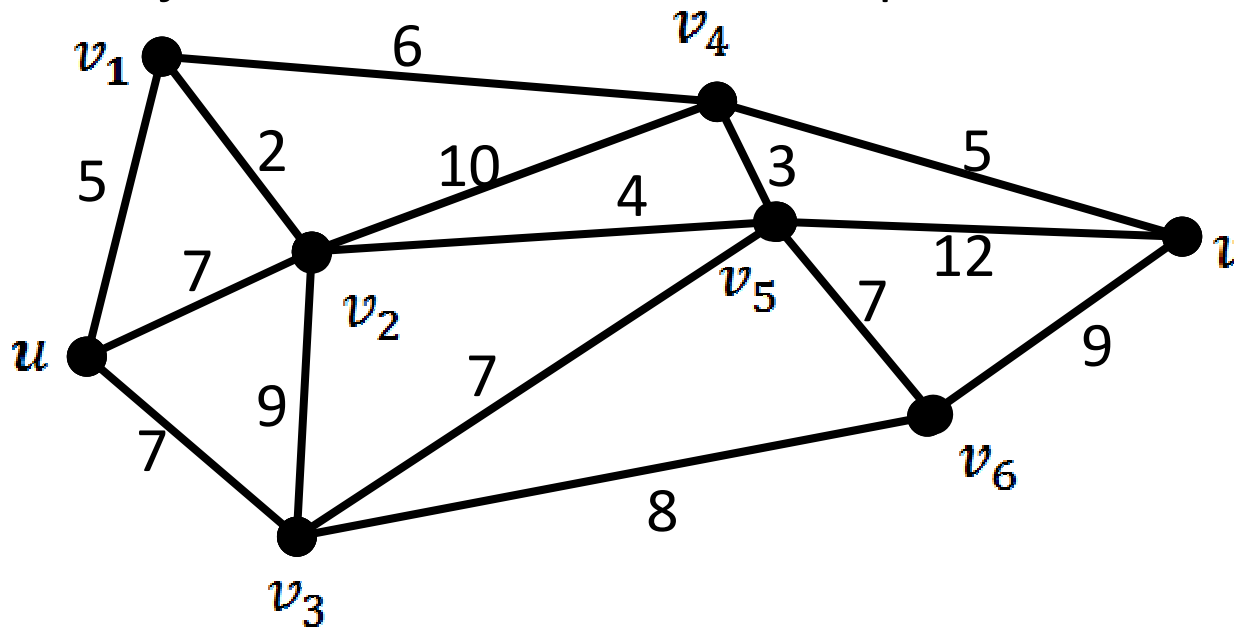
III°a) Ak skrátением hrán dôjde k stotožneniu vrcholov  $u$  a  $v$ , tak nasleduje postup na krok IV.

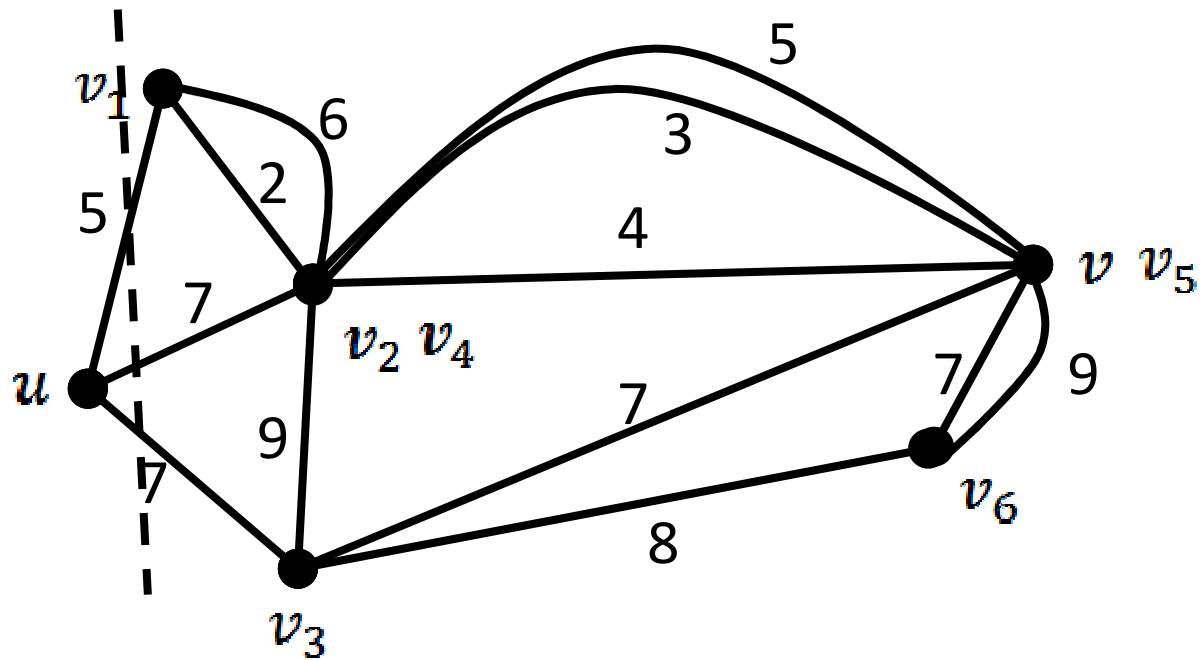
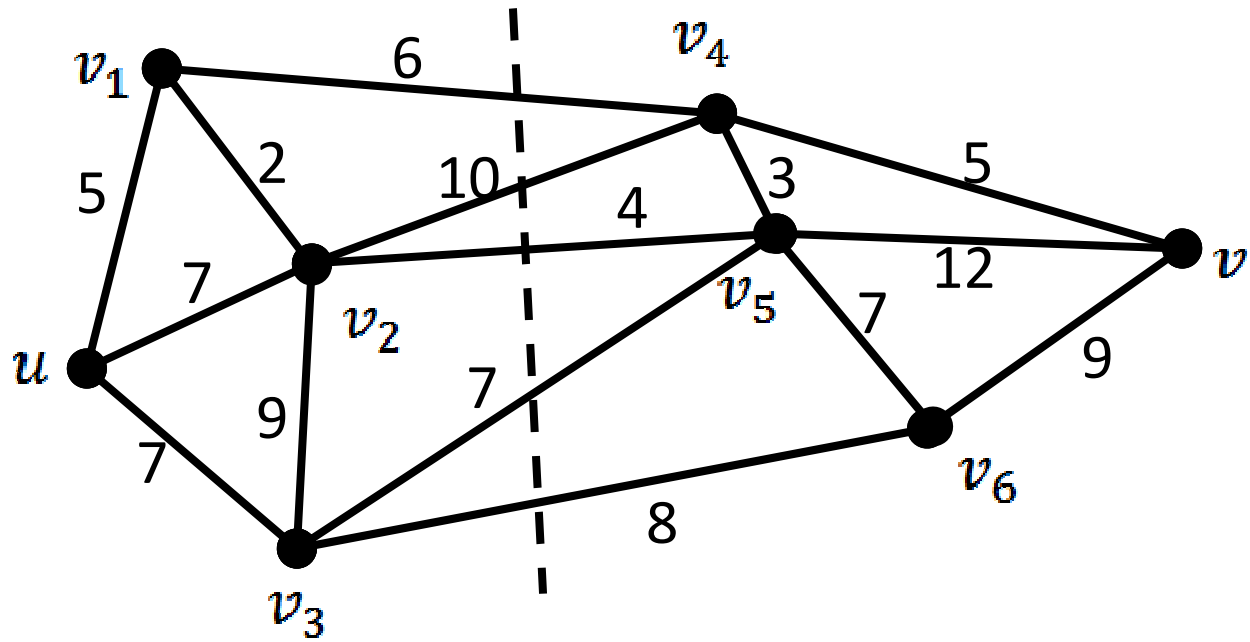
b) Ak skrátением hrán nedôjde k stotožneniu vrcholov  $u$  a  $v$  tak nasleduje návrat na krok I.

## Algoritmus zostrojenia cesty s maximálnou kapacitou- pokračovanie

IV° Zo všetkých vrcholov pôvodného grafu a zo všetkých hrán, ktoré boli skrátané, vytvoríme nový graf  $G' = (V, X')$ . Ľubovoľná cesta  $m(u,v)$  v tomto grafe tvorí cestu s maximálnou kapacitou medzi vrcholmi  $u$  a  $v$ .

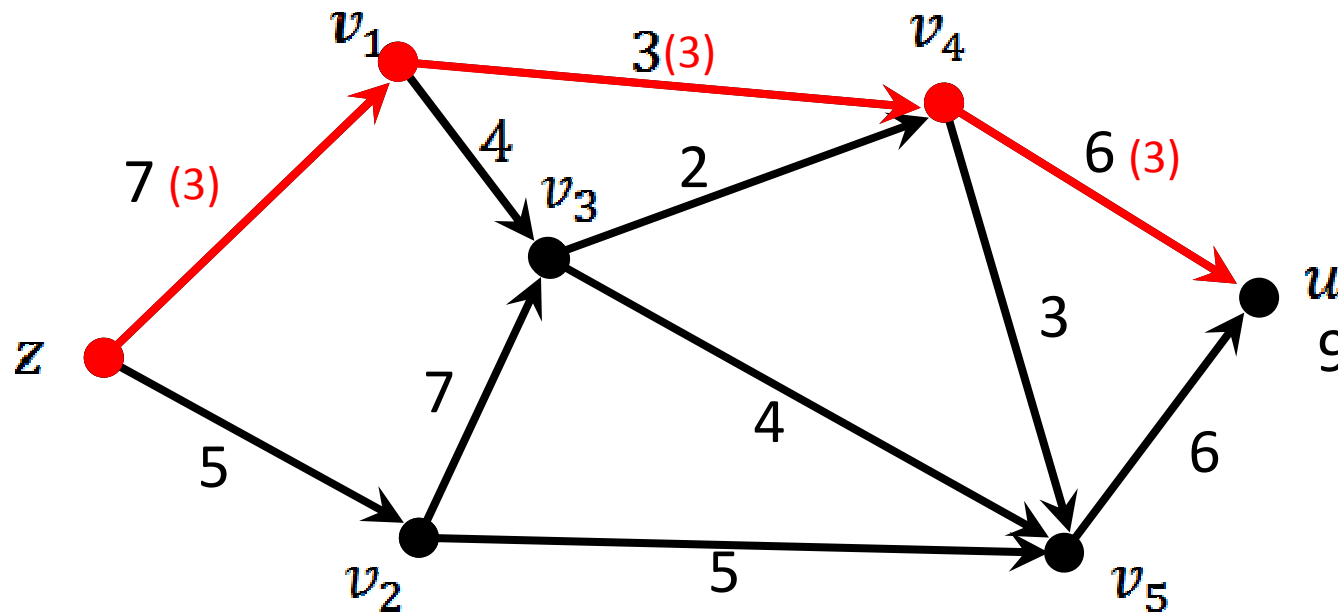
**Príklad :** Nájdite cestu s maximálnou kapacitou.





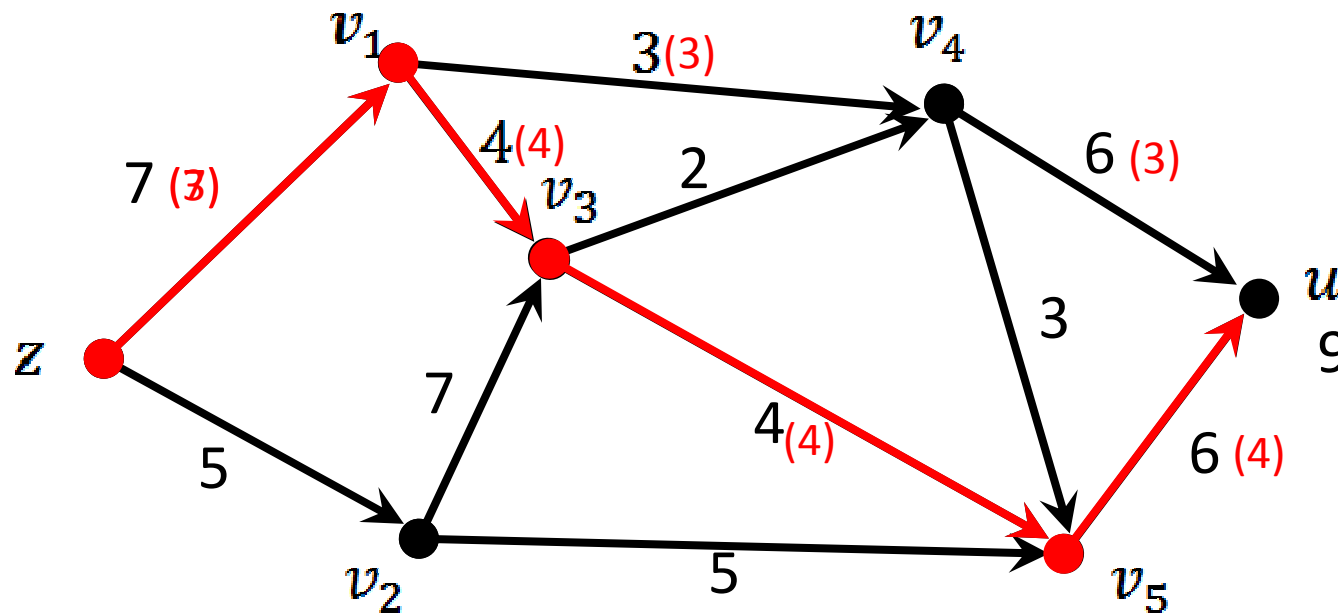
## Algoritmus zostrojenia maximálneho toku v rovinnej sieti

1. Zostrojíme najvyššie položenú dráhu  $m[z, u]$  zo zdroja do ústia, ktorá pozostáva z nenasýtených orientovaných hrán. Vedeíme po nej toľko jednotiek toku, aby sme aspoň jednu orientovanú hranu tejto dráhy nasýtili.
2. Postup podľa bodu 1 opakujeme dovtedy, kým existuje aspoň jedna dráha zo zdroja do ústia pozostávajúca z nenasýtených orientovaných hrán. V opačnom prípade je zostrojený tok maximálny.



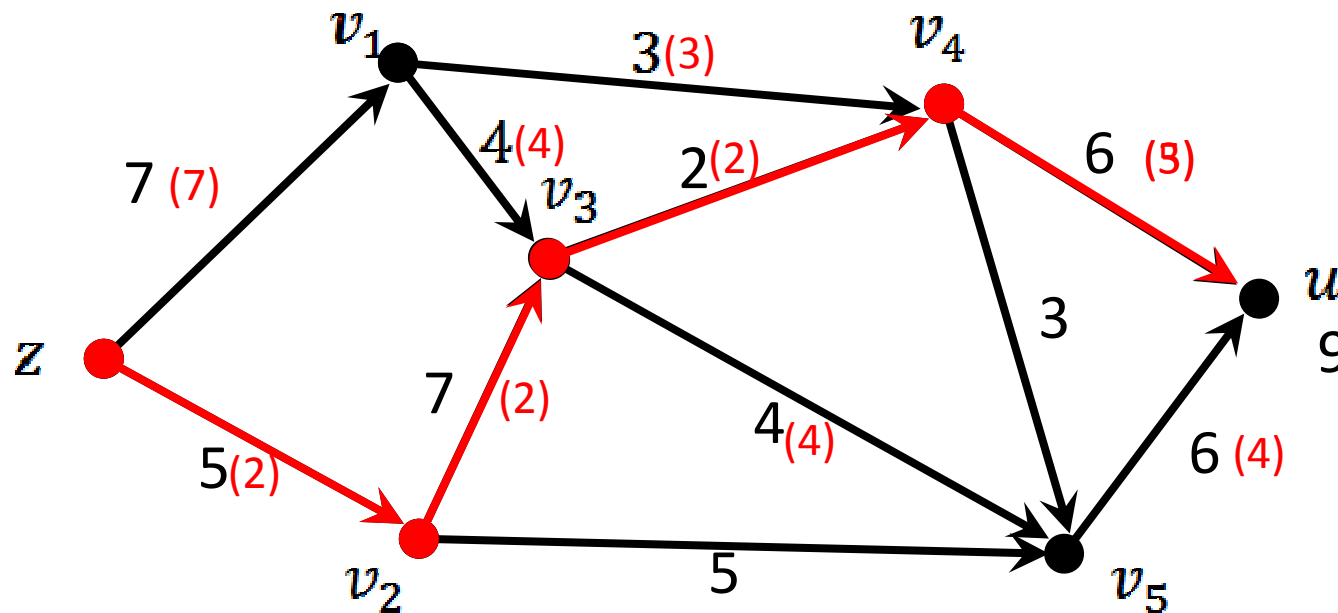
## Algoritmus zostrojenia maximálneho toku v rovinnej sieti

1. Zostrojíme najvyššie položenú dráhu  $m[z, u]$  zo zdroja do ústia, ktorá pozostáva z nenasýtených orientovaných hrán. Vedeíme po nej toľko jednotiek toku, aby sme aspoň jednu orientovanú hranu tejto dráhy nasýtili.
2. Postup podľa bodu 1 opakujeme dovtedy, kým existuje aspoň jedna dráha zo zdroja do ústia pozostávajúca z nenasýtených orientovaných hrán. V opačnom prípade je zostrojený tok maximálny.



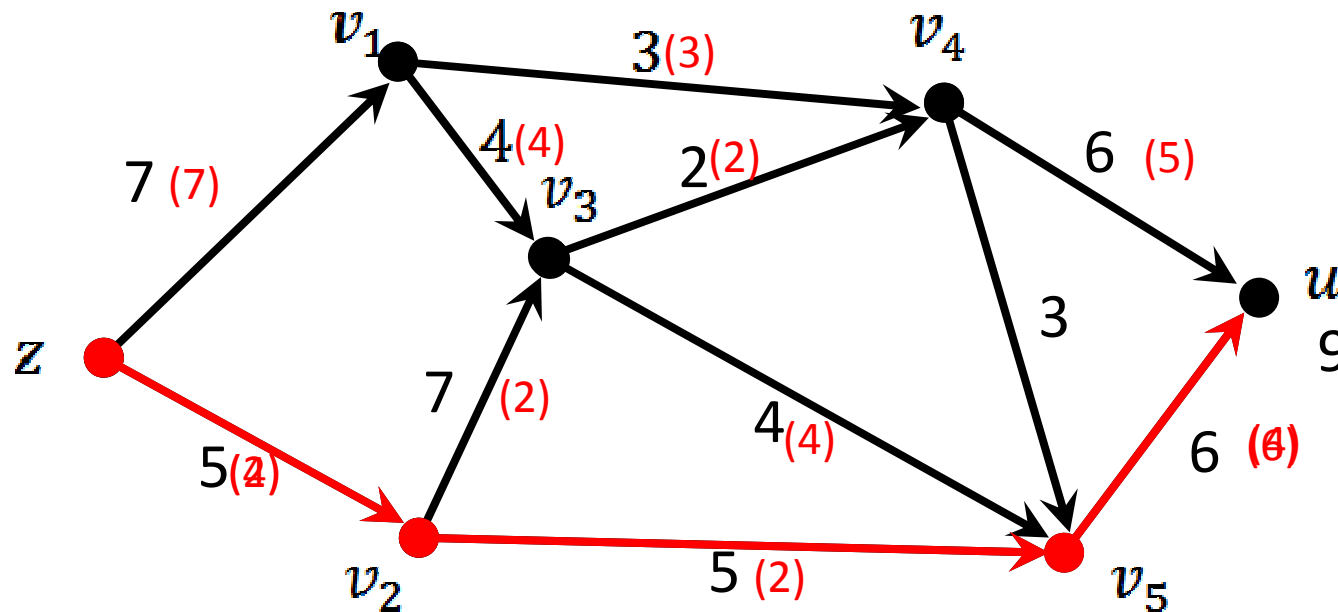
## Algoritmus zostrojenia maximálneho toku v rovinnej sieti

1. Zostrojíme najvyššie položenú dráhu  $m[z, u]$  zo zdroja do ústia, ktorá pozostáva z nenasýtených orientovaných hrán. Vedeíme po nej toľko jednotiek toku, aby sme aspoň jednu orientovanú hranu tejto dráhy nasýtili.
2. Postup podľa bodu 1 opakujeme dovtedy, kým existuje aspoň jedna dráha zo zdroja do ústia pozostávajúca z nenasýtených orientovaných hrán. V opačnom prípade je zostrojený tok maximálny.



## Algoritmus zostrojenia maximálneho toku v rovinnej sieti

1. Zostrojíme najvyššie položenú dráhu  $m[z, u]$  zo zdroja do ústia, ktorá pozostáva z nenasýtených orientovaných hrán. Vedeíme po nej toľko jednotiek toku, aby sme aspoň jednu orientovanú hranu tejto dráhy nasýtili.
2. Postup podľa bodu 1 opakujeme dovtedy, kým existuje aspoň jedna dráha zo zdroja do ústia pozostávajúca z nenasýtených orientovaných hrán. V opačnom prípade je zostrojený tok maximálny.



## Algoritmus na zostrojenie maximálneho toku v dopravnej sieti- Ford-Fulkersonov

Pri konštrukcii maximálneho toku vychádzame z predpokladu, že v uvažovanej sieti  $D=(V, X)$  je zostrojený nezáporný tok.

1. Vrcholy siete označujeme podľa nasledujúcich pravidiel:
  - vrchol  $z = v_0$  (počiatočný) pokladáme vždy za označený
  - nech vrchol  $v_i$  je označený; indexom  $-i$  označíme všetky neoznačené vrcholy  $v_j$ , pre ktoré platí: orientovaná hrana  $[v_j, v_i] \in X$  a tok v nej po tejto hrane je kladný. Indexom  $+i$  označíme všetky neoznačené vrcholy  $v_j$ , pre ktoré platí: orientovaná hrana  $(v_i, v_j) \in X$  a tok po tejto hrane  $x[v_i, v_j]$  je menší ako možný tok. Ak podľa uvedených pravidiel je možné označiť ústie  $u$  indexom  $+i$  alebo  $-i$ , tak tok nie je maximálny a nasleduje postup na krok 2. V opačnom prípade pokračujeme krokom 4.
2. Určíme cestu  $m(z,u)$  bez ohľadu na orientáciu od ústia  $u$  k zdroju  $z$  tak, že k označenému vrcholu  $v_j$ , v ktorom sa nachádzame (označenie je  $+i$  alebo  $-i$ ) vyberieme vrchol  $v_i$  a orientovanú hranu  $[v_i, v_j]$  alebo  $[v_j, v_i]$ .
3. Zmeníme tok:
  - $x[h] \leftarrow x[h]+1$ , ak na ceste  $m(z,u)$  prechádzame hranu  $h$  v smere orientácie,
  - $x[h] \leftarrow x[h]-1$ , ak na ceste  $m(z,u)$  prechádzame hranu  $h$  proti smeru jej orientácieZrušíme označenia vrcholov a nasleduje návrat na krok 1.
4. Zostrojený tok je maximálny



Príklad : Nájdite maximálny tok.

