

## 28. Aplikácie integrálov

### Veta 28.1:

Ak  $f$  je funkcia integrovateľná na  $I$  a  $\mu(J) = \int_J f \, d\lambda$  pre každý interval  $J \subset I$ , potom  $\mu$  je aditívna funkcia intervalu a mediálna vzhľadom na funkciu  $f$ .

Nech  $I, J$  sú také intervaly, že  $J \subset I$ . Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$ , potom je tiež integrovateľná na intervale  $J$ .

Nech  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$  a intervaly  $I_n$  sú navzájom disjunktné. Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na každom z intervalov  $I_n$ ,  $n=1, 2, \dots$

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$ , potom 
$$\int_I f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f \, d\lambda$$

Ak  $f$  a  $g$  sú funkcie integrovateľné na  $I$  a  $f(x) \leq g(x)$  pre každé  $x \in I$  potom 
$$\int_I f \, d\lambda \leq \int_I g \, d\lambda$$

### Veta 28.2:

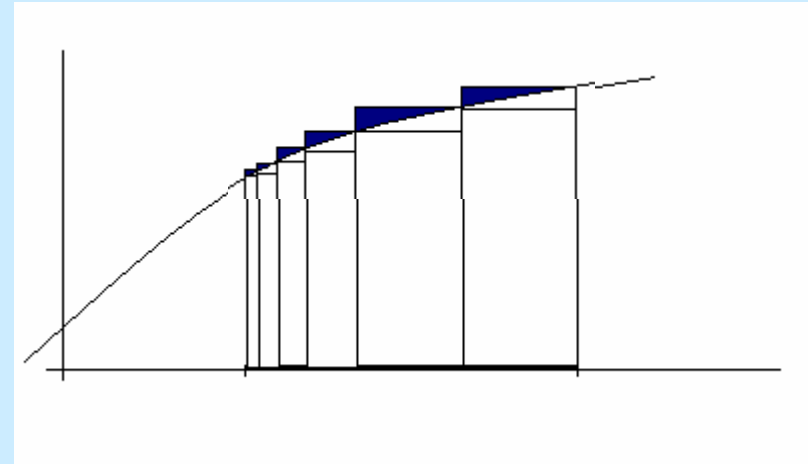
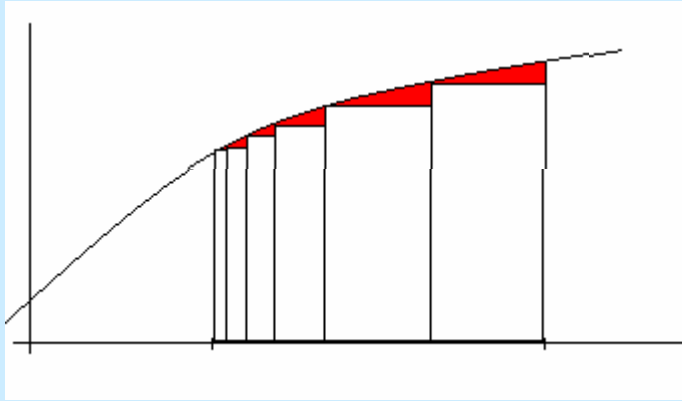
Nech  $I$  je kompaktný interval. Nech  $\mu$  je funkcia intervalov definovaná pre všetky intervaly  $J \subset I$ , mediálna vzhľadom na hodnoty funkcie  $f$ .

Ak  $g$  a  $h$  sú funkcie po častiach konštantná taká, že  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  pre  $x \in I$ , potom 
$$\int_J g \, d\lambda \leq \mu(J) \leq \int_J h \, d\lambda$$
 pre  $J \subset I$ .

### Veta 28.3:

Nech  $I$  je kompaktný interval a funkcia  $f$  definovaná v každom bode  $I$  a má v každom bode limitu. Nech  $\mu$  je aditívnou funkciou intervalov definovaná pre všetky intervaly  $J \subset I$ , mediálna vzhľadom na hodnoty funkcie  $f$ , potom  $\mu(J) = \int_J f \, d\lambda$  pre  $J \subset I$ .

Ak  $f$  je funkcia integrovateľná na  $I$  a  $\mu(J) = \int_J f \, d\lambda$  pre každý interval  $J \subset I$ , potom  $\mu$  je aditívna funkcia intervalu a mediálna vzhľadom na funkciu  $f$ .



Súčet plôch týchto obdĺžníkov je rovný ploche množiny  $S$ .

Tie obdĺžniky musia spĺňať nasledujúce vlastnosti  $J_j \subset I$  a čísla  $c_j, j= 1, 2, 3, \dots$  také, že

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x) , \text{ pre každé } x \in I$$

a plocha množiny  $S$  je rovná číslu

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(J_j)$$

## Definícia 28.2 :

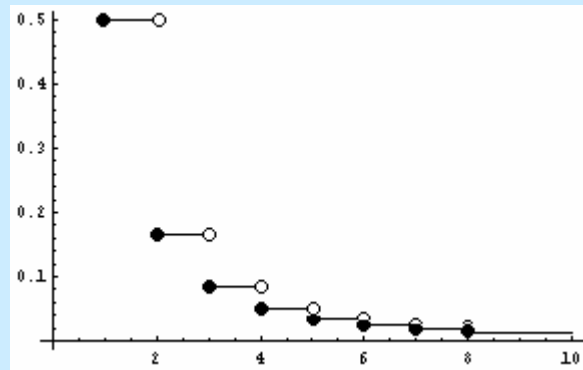
Funkcia  $f$  sa nazýva *integrovateľnou* na intervale  $I$  ak existujú čísla  $c_j$  a ohraničené intervaly  $J_j \subset I$ ,  $j=1, 2, 3, \dots$  také, že  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty$  a rovnosť

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x), \text{ platí pre každé } x \in I \text{ také, že } \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty.$$

**Priklad 2a)** : Vezmime si funkciu po častiach konštantnú na kompaktnom intervale, potom táto funkcia je integrovateľná na tomto intervale.

**Priklad 3a )** : Nech  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  sú body intervalu  $I$ , všetky rôzne. Nech  $f$  je funkcia na intervale  $I$  taká, že  $f(x) = 0$ , kde  $x \in I$  a  $x \neq x_j$ , pre každé  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na  $I$ .

**Priklad 4a )** : Nech  $f(x) = \frac{1}{[x][x+1]}$ , pre  $x \geq 1$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na  $I$ .



### Veta 28.1:

Nech  $I$  je interval. Nech  $c_j$  a  $d_j$  sú čísla a  $J_j$  a  $K_j$  ohraničené intervaly také, že  $J_j \subset I$ ,  $K_j \subset I$ , pre každé  $j = 1, 2, 3, \dots$  a platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |d_j| \lambda(K_j) < \infty$$

Ak  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \chi_{K_j}(x)$  platí pre každé  $x \in I$ , ktoré

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |d_j| \chi_{K_j}(x) < \infty$$

potom  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(J_j) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \lambda(K_j)$

### Definícia 28.3 :

*Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na  $I$ . Nech  $c_j$  sú čísla a ohraničené intervaly  $J_j \subset I$ ,  $j=1, 2, 3, \dots$  také, že  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty$  a rovnosť  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x)$ , platí*

*pre každé  $x \in I$  a  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty$ . Potom číslo  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(J_j)$  sa nazýva integrál*

*funkcie  $f$  na intervale  $I$  a označuje sa  $\int_I f \, d\lambda$*

**Příklad 2b)** : Majme funkciu  $f$  z příkladu 2a). Vypočítajte jej integrál.  
Funkcia po častiach konštantná na kompaktnom intervale.

**Příklad 3b)** : Majme funkciu  $f$  z příkladu 3a) t.j. nech  $x_j, j = 1, 2, 3, \dots$  sú body intervalu  $I$ , všetky rôzne. Nech  $f$  je funkcia na intervale  $I$  taká, že  $f(x) = 0$ , kde  $x \in I$  a  $x \neq x_j$ , pre každé  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Vypočítajte integrál funkcie  $f$  na  $I$ .

**Příklad 4b)** : Nech  $f(x) = \frac{1}{[x][x+1]}$ , pre  $x \geq 1$ . Vypočítajte integrál funkcie  $f$  je na  $I$ .

## Závislosť na funkcií

### Veta 28.2:

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$ , potom funkcia  $|f|$  je tiež

integrovateľná na  $I$  a  $\left| \int_I f \, d\lambda \right| = \int_I |f| \, d\lambda$

### Veta 28.3:

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$  a  $f(x) \geq 0$  pre každé  $x \in I$  potom

$$\int_I f \, d\lambda \geq 0.$$

Ak  $f$  a  $g$  sú funkcie integrovateľné na  $I$  a  $f(x) \leq g(x)$  pre každé  $x \in I$  potom

$$\int_I f \, d\lambda \leq \int_I g \, d\lambda$$

### Veta 28.4:

Nech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  a  $f_k$  je integrovateľná na intervale  $I$  pre každé  $k = 1, 2, \dots$ .

Potom funkcia  $f = \sum_{k=1}^n c_k f_k$  je tiež integrovateľná na  $I$  a

$$\int_I f \, d\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \int_I f_k \, d\lambda$$

**Příklad 5 :** Nech  $f$  a  $g$  sú funkcie definované v každom bode intervalu  $I$  také, že množina  $\{x : x \in I, f(x) \neq g(x)\}$  sú bodu intervalu  $I$ , v ktorých sa funkčné hodnoty líšia je spočítateľná. Potom ak jedná funkcia  $f$  alebo  $g$  je integrovateľná na  $I$  potom aj druhá a  $\int_I f \, d\lambda = \int_I g \, d\lambda$

## Veta 28.5:

Nech  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sú funkcie integrovateľné na intervale  $I$  také, že  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |f_n| d\lambda < \infty$ .

Nech  $f$  je funkcia na  $I$  taká, že  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , pre každé  $x \in I$ , ktoré  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ .

Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$  a  $\int_I f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n d\lambda$

## Veta 28.6:

Nech  $f_n$  sú integrovateľné na intervale  $I$  také, že  $f_n(x) \geq 0$  pre každé  $x \in I$  a každé  $n = 1, 2, \dots$ . Nech  $f$  je funkcia na  $I$  taká, že platí  $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)$  pre

každé  $x \in I$ . potom funkcia  $f$  je integrovateľná na  $I$  vtedy a len vtedy, keď a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n d\lambda < \infty$$

**Priklad 6 :** Nech  $f(x) = 1$  pre  $x \in (-\infty, \infty)$ , potom funkcia  $f$  nie je integrovateľná na intervale  $\langle 1, \infty \rangle$

**Priklad 7 :** Nech  $f(x) = n$  pre každé  $x \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ , pre každé  $n=1, 2, \dots$ . Potom funkcia  $f$  nie je integrovateľná na intervale  $(0, 1)$ .



## Integrovanie funkcií

**Priklad 8 :** Nech  $a, b$  sú čísla ( $a < b$ ). Nech  $J$  je interval s koncovými bodmi  $u$  a  $v$  také, že  $a \leq u \leq v \leq b$ . Nech  $c$  je číslo a funkcia  $f$  je rovná  $f(x) = c\chi_J(x)$ . Funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $\langle a, b \rangle$  a

$$\int_a^b f(x) dx = c(v - u).$$

**Priklad 9 :** Nech  $a, b$  sú čísla také, že  $a < b$ . Nech  $f$  je funkcia po častiach konštantná na intervale  $\langle a, b \rangle$  a nech  $F$  je funkcia takmer primitívna k funkcií  $f$  na intervale  $\langle a, b \rangle$ , potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

### Veta 28.7:

Nech  $a, b$  sú čísla také, že  $a < b$  a nech  $f$  je funkcia, ktorá má v každom bode limitu sprava (resp. zľava) na intervale  $\langle a, b \rangle$  (v bode limita existovať nemusí). Potom existuje postupnosť  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  funkcie po častiach konštantnej na intervale  $\langle a, b \rangle$  takej, že  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  je rovnomerne konvergentná na intervale  $\langle a, b \rangle$ .

### Veta 28.7(pokračovanie):

Nech  $w \in \langle a, b \rangle$  a nech  $F_n$  je funkcia takmer primitívna k funkcií  $f_n$  taká, že  $F_n(w)=0$ , pre každé  $n = 1, 2, \dots$ . Potom funkcionálny rad  $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$  je rovnomerne konvergentný na intervale  $\langle a, b \rangle$  a ak

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \text{ pre každé } x \in \langle a, b \rangle$$

potom  $F(w)=0$  a funkcia  $F$  je takmer primitívnu k funkcií  $f$  na intervale  $\langle a, b \rangle$ .

### Veta 28.8:

Nech  $a, b$  sú čísla také, že  $a < b$  a nech  $f$  je funkcia, ktorá má v každom bode limitu sprava (resp. zľava) na intervale  $\langle a, b \rangle$  (v bode limita existovať nemusí). Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $\langle a, b \rangle$

a  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  pre ľubovoľnú funkciu  $F$ , ktorá je takmer primitívna k funkcií  $f$  na intervale  $\langle a, b \rangle$ .

Příklad 10 : Vypočítajte  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

Příklad 11 : Dokážte  $\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$

## Závislosť na intervale

### Veta 28.9:

Nech  $I, J$  sú také intervaly, že  $J \subset I$ . Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$ , potom je tiež integrovateľná na intervale  $J$ .

### Veta 28.10:

Nech  $I, J$  sú také intervaly, že  $J \subset I$ . Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $J$  a ak  $f(x)=0$ , pre každé  $x \in I - J$ , potom  $f$  je tiež integrovateľná na intervale  $I$  a  $\int_I f \, d\lambda = \int_J f \, d\lambda$

### Veta 28.11:

Nech  $f$  je funkcia integrovateľná na intervale  $I$  taká,  $f(x) \geq 0$ , pre každé  $x \in I$ . Nech  $J$  je interval taký, že  $J \subset I$  potom  $\int_J f \, d\lambda \leq \int_I f \, d\lambda$

### Veta 28.12:

Nech  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$  a intervaly  $I_n$  sú navzájom disjunktné. Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na každom z intervalov  $I_n$ ,  $n=1, 2, \dots$

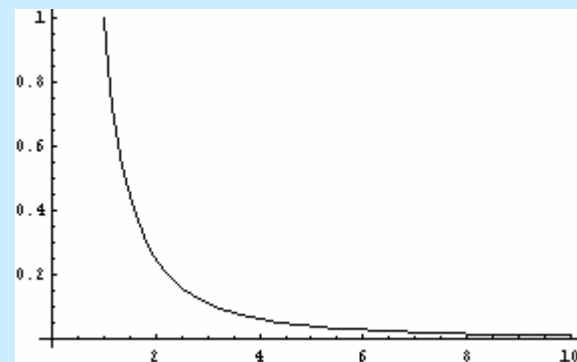
Funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$  vtedy a len vtedy, keď

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f| \, d\lambda < \infty.$$

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $I$ , potom  $\int_I f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f \, d\lambda$

**Priklad 12 :** Nech  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , pre  $x > 0$ . Ukážte,

že funkcia  $f$  je integrovateľná na  $\langle 1, \infty)$  a vypočítajte hodnotu jej integrálu.



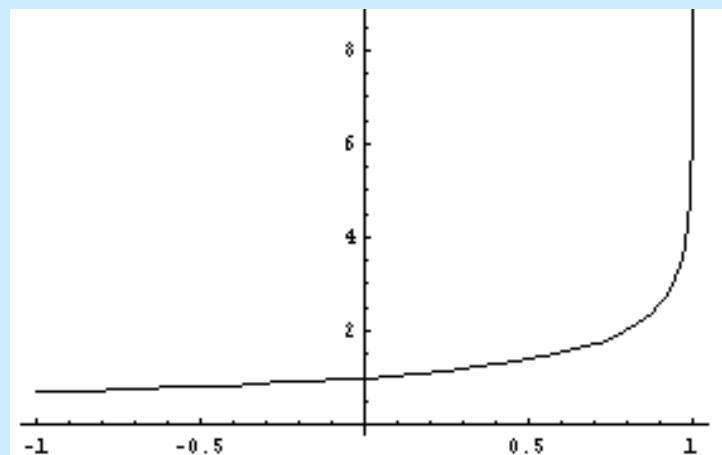
## Limity integrálov

### Veta 28.13:

Ak ľubovoľné dva integrály  $\int_a^b f \, d\lambda$ ,  $\int_b^c f \, d\lambda$ ,  $\int_a^c f \, d\lambda$  existujú, potom tiež existuje tretí a platí rovnosť  $\int_a^b f \, d\lambda + \int_b^c f \, d\lambda = \int_a^c f \, d\lambda$

**Priklad 13 :** Ukážte, že integrál  $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$  existuje pre každé

$x \in \langle -1, 1 \rangle$  a výslednú funkciu  $f$  môžeme vyjadriť ako mocninný rad.



## Veta 28.14:

Nech  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, v)$  pre každé  $v \in (a, b)$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  vtedy a len vtedy, keď existuje číslo  $M$  také, že

$$\int_a^v |f| \, d\lambda \leq M, \text{ pre každé } v \in (a, b).$$

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  potom

$$\int_a^b f \, d\lambda = \lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v f \, d\lambda,$$

Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(u, b)$  pre každé  $u \in (a, b)$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  vtedy a len vtedy, keď existuje číslo  $M$  také, že

$$\int_u^b |f| \, d\lambda \leq M, \text{ pre každé } u \in (a, b).$$

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  potom

$$\int_a^b f \, d\lambda = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f \, d\lambda,$$

**Příklad 14 :** Ukážete, že integrál  $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$  existuje a vypočítajte ho.

### Veta 28.15:

Nech  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Nech funkcia  $f(x) \geq 0$ , pre každé  $x \in \langle a, b \rangle$ .

Ak funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, v)$  pre každé  $v \in (a, b)$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  vtedy a len vtedy, keď existuje

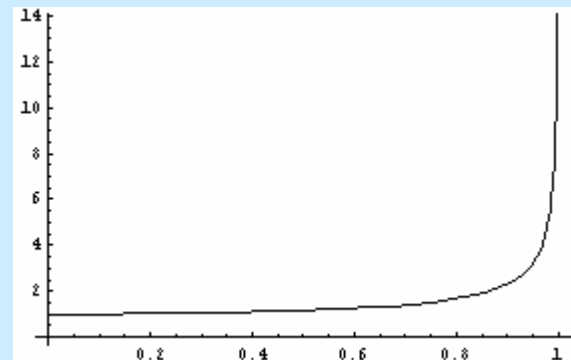
limita  $\lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v f \, d\lambda$  a integrál funkcie  $f$  na intervale  $(a, b)$  je

$$\int_a^b f \, d\lambda = \lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v f \, d\lambda,$$

Nech funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(u, b)$  pre každé  $u \in (a, b)$ . Potom funkcia  $f$  je integrovateľná na intervale  $(a, b)$  vtedy a len vtedy, keď

existuje  $\lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f \, d\lambda$ . A integrál na intervale  $(a, b)$  je  $\int_a^b f \, d\lambda = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f \, d\lambda$ .

**Příklad 15 :** Vypočítajte  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$



**Příklad 16 :** Ukážte, že pre každé  $\alpha > 1$  je rad  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  konvergentný.

### Veta 28.15:

Nech  $a$  a  $b$  sú čísla  $a < b$ . Nech funkcie  $Df$  a  $Dg$  majú limity (sprava, zľava) v bodoch intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nech funkcie  $f$  a  $g$  sú funkcie takmer primitívne k  $Df$ ,  $Dg$  na intervale  $\langle a, b \rangle$ . Potom

$$\int_a^b f(x)Dg(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b Df(x)g(x) dx,$$