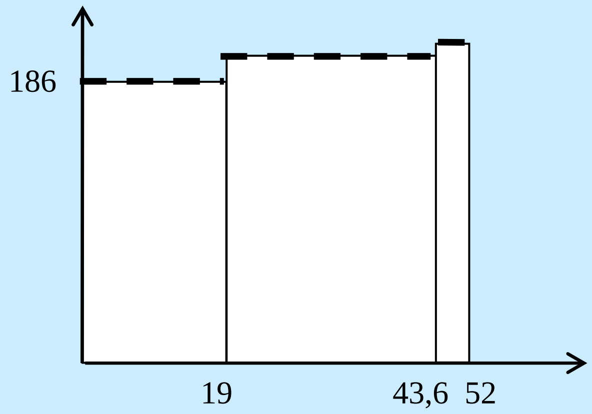
27. Integrál

Definícia 27.1 :

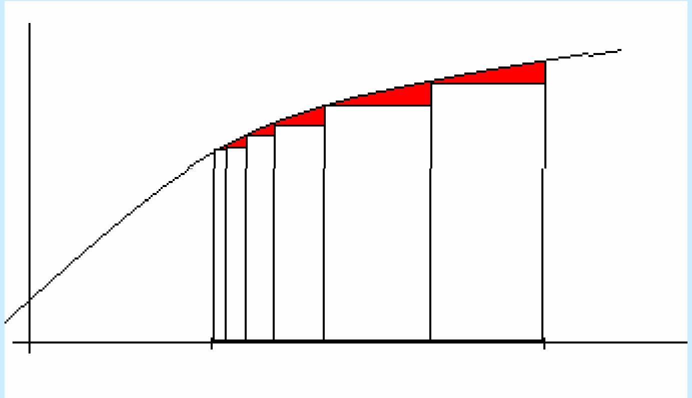
Nech u, v sú reálne čísla také, že $u \leq v$ potom číslo $v - u$ nazývame dĺžka nejakého intervalu J*, ktorého koncové body sú u, v. A označuje sa* λ (J).

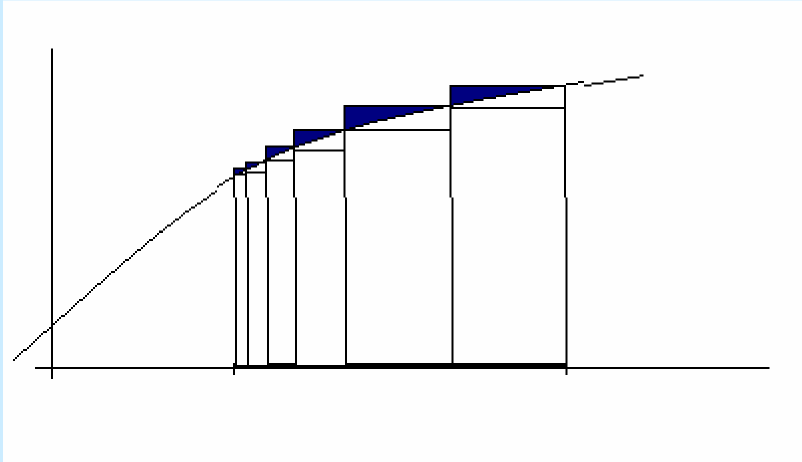
Priklad 1 : Počas prvých 19 týždňov finančného roku (52 týždňov) , zisk na jedného zamestnanca bol \$186 týždenne. Potom nastalo zlepšenie a zisk sa zvýšil na \$203,5 na týždeň. Mesiac pred skončením finančného roka vzrástol zisk na \$211,3 na týždeň. Ako by vyzerala funkcia ziskovosti firmy počas celého finančného roka na jedného zamestnanca ?.



$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{J_j}(x)$$

$$\mathrm{I} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda\left(J_j\right)$$





Súčet plôch týchto obdlžníkov je rovný ploche množiny S.
Tie obdĺžniky musia spĺňať nasledujúce vlastnosti $J_j \subset$ I a čísla c_j, j= 1, 2, 3, ... také, že

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x) \text{ , pre každé } x \in \mathrm{I}$$

a plocha množiny S je rovná číslu

$$\mathrm{S} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda\left(J_j\right)$$

Definícia 27.2 :

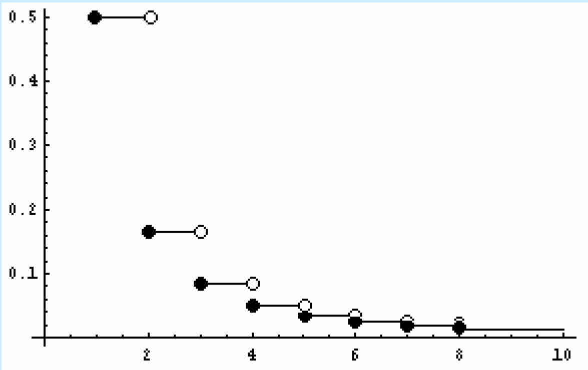
Funkcia f sa nazýva integrovateľnou na intervale I ak existujú čísla c_j a ohraničené intervaly $J_j \subset I$, $j=1, 2, 3, \ldots$ také, že $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty$ *a rovnost*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x), \text{ platí pre každé } x \in I \text{ také, že } \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty.$$

Priklad 2a) : Vezmime si funkciu po častiach konštantnú na kompaktnom intervale, potom táto funkcia je integrovateľná na tomto intervale.

Priklad 3a) : Nech x_j , $j = 1, 2, 3, \ldots$ sú body intervalu I, všetky rôzne. Nech f je funkcia na intervale I taká, že $f(x) = 0$, kde $x \in$ I a $x \neq x_j$, pre každé $j = 1, 2, 3, \ldots$. Potom funkcia f je integrovateľná na I.

Priklad 4a) : Nech $f(x) = \dfrac{1}{[x][x+1]}$, pre $x \geq 1$. Potom funkcia f je integrovateľná na I.



Veta 27.1:

Nech I je interval. Nech c_j a d_j sú čísla a J_j a K_j ohraničené intervaly také, že $J_j \subset$ I , $K_j \subset$ I, pre každé j = 1, 2, 3, ... a platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |d_j| \lambda(K_j) < \infty$$

Ak $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \chi_{K_j}(x)$ platí pre každé $x \in$ I, ktoré

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |d_j| \chi_{K_j}(x) < \infty$$

potom $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(J_j) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \lambda(K_j)$

Definícia 27.3 :

Nech funkcia f je integrovateľná na I. Nech c_j sú čísla a ohraničené intervaly $J_j \subset I$, j=1, 2, 3, ... také, že $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \lambda(J_j) < \infty$ a rovnosť $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{J_j}(x)$, platí pre každé $x \in I$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \chi_{J_j}(x) < \infty$. Potom číslo $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(J_j)$ sa nazýva integrál funkcie f na intervale I a označuje sa $\int_I f \,\mathrm{d}\lambda$

Priklad 2b) : Majme funkciu f z príkladu 2a). Vypočítajte jej integrál.
Funkcia po častiach konštantná na kompaktnom intervale.

Priklad 3b) : Majme funkciu f z príkladu 3a) t.j. nech x_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ sú body intervalu I, všetky rôzne. Nech f je funkcia na intervale I taká, že $f(x) = 0$, kde $x \in$ I a $x \neq x_j$, pre každé $j = 1, 2, 3, \ldots$. Vypočítajte integrál funkcie f na I.

Priklad 4b) : Nech $f(x) = \dfrac{1}{[x][x+1]}$, pre $x \geq 1$. Vypočítajte integrál funkcie f je na I.

Závislosť na funkcií

Veta 27.2:

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale I, potom funkcia $|f|$ je tiež integrovateľná na I a $\left|\int_I f \, d\lambda\right| = \int_I |f| \, d\lambda$

Veta 27.3:

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale I a $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in$ I potom $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda \geq 0$.

Ak f a g sú funkcie integrovateľné na I a $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in$ I potom $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_I g \, \mathrm{d}\lambda$

Veta 27.4:

Nech $n \in$ N, $c_k \in$ R a f_k je integrovateľná na intervale I pre každé $k = 1, 2, \ldots$.

Potom funkcia $f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ je tiež integrovateľná na I a

$$\int_I f \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_I f_k \, \mathrm{d}\lambda$$

Priklad 5 : Nech f a g sú funkcie definované v každom bode intervalu I také, že množina $\{x : x \in I, f(x) \neq g(x)\}$ sú bodu intervalu I, v ktorých sa funkčné hodnoty líšia je spočítateľná. Potom ak jedná funkcia f alebo g je integrovateľná na I potom aj druhá a $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda = \int_I g \, \mathrm{d}\lambda$

Veta 27.5:

Nech f_n, n = 1, 2, ... sú funkcie integrovateľné na intervale I také, že $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I |f_n|\,\mathrm{d}\lambda < \infty$.

Nech f je funkcia na I taká, že $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, pre každé $x\in$ I, ktoré $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| < \infty$.

Potom funkcia f je integrovateľná na intervale I a $\int_I f\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}\lambda$

Veta 27.6:

Nech f_n sú integrovateľné na intervale I také, že $f_n(x) \geq 0$ pre každé $x\in$ I a každé n = 1, 2, ... Nech f je funkcia na I taká, že platí $f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)$ pre každé $x\in$ I. potom funkcia f je integrovateľná na I vtedy a len vtedy, keď a $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}\lambda < \infty$

Priklad 6 : Nech $f(x) = 1$ pre $x\in(-\infty, \infty)$, potom funkcia f nie je integrovateľná na intervale $\langle 1, \infty)$

Priklad 7 : Nech $f(x) = n$ pre každé $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right\rangle$, pre každé n=1, 2, ... Potom funkcia f nie je integrovateľná na intervale $(0, 1\rangle$.

Integrovanie funkcií

Priklad 8 : Nech a, b sú čísla ($a<b$). Nech J je interval s koncovými bodmi u a v také, že $a \le u \le v \le b$. Nech c je číslo a funkcia f je rovná $f(x) = c\chi_{\mathrm{J}}(x)$. Funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(v-u).$$

Priklad 9 : Nech a, b sú čísla také, že $a<b$. Nech f je funkcia po častiach konštantná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech F je funkcia takmer primitívna k funkcií f na intervale $\langle a, b\rangle$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Veta 27.7:

Nech a, b sú čísla také, že $a<b$ a nech f je funkcia, ktorá má v každom bode limitu sprava (resp. zľava) na intervale $\langle a, b\rangle$ (v bode limita existovať nemusí). Potom existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcie po častiach konštantnej na intervale $\langle a, b\rangle$ takej, že $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je rovnomerne konvergentná na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 27.7(pokračovanie):

Nech $w \in \langle a, b\rangle$ a nech F_n je funkcia takmer primitívna k funkcií f_n taká, že $F_n(w)=0$, pre každé $n = 1, 2, \ldots$. Potom funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ je rovnomerne konvergentný na intervale $\langle a, b\rangle$ a ak

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \text{ pre každé } x \in \langle a, b\rangle$$

potom $F(w)=0$ a funkcia F je takmer primitívnou k funkcií f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 27.8:

Nech a, b sú čísla také, že $a<b$ a nech f je funkcia, ktorá má v každom bode limitu sprava (resp. zľava) na intervale $\langle a, b\rangle$ (v bode limita existovať nemusí). Potom funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ pre ľubovoľnú funkciu F, ktorá je takmer primitívna k funkcií f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Priklad 10 : Vypočítajte $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x$

Priklad 11 : Dokážte $\int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$

Závislosť na intervale

Veta 27.9:

Nech I, J sú také intervaly, že $J \subset I$. Ak funkcia f je integrovateľná na intervale I, potom je tiež integrovateľná na intervale J.

Veta 27.10:

Nech I, J sú také intervaly, že $J \subset I$. Ak funkcia f je integrovateľná na intervale J a ak $f(x)=0$, pre každé $x \in I - J$, potom f je tiež integrovateľná na intervale I a $\int_I f \, \mathrm{d}\lambda = \int_J f \, \mathrm{d}\lambda$

Veta 27.11:

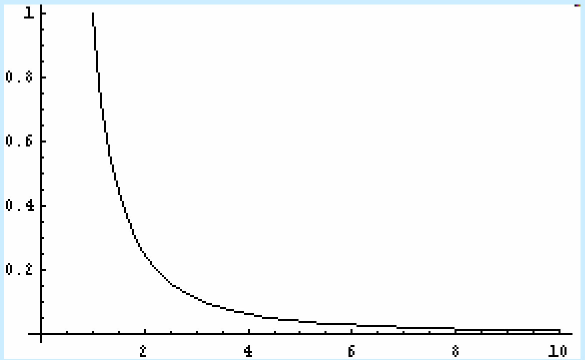
Nech f je funkcia integrovateľná na intervale I taká, $f(x)\geq 0$, pre každé $x\in I$. Nech J je interval taký, že $J\subset I$ potom $\int_J f\ \mathrm{d}\lambda \leq \int_I f\ \mathrm{d}\lambda$

Veta 27.12:

Nech $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ a intervaly I_n sú navzájom disjunktné. Nech funkcia f je integrovateľná na každom z intervalov I_n , n=1, 2, ...
Funkcia f je integrovateľná na intervale I vtedy a len vtedy, keď $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n}|f|\ \mathrm{d}\lambda < \infty$.

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale I, potom $\int_I f\ \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n} f\ \mathrm{d}\lambda$

Priklad 12 : Nech $f(x)=\frac{1}{x^2}$, pre $x > 0$. Ukážte, že funkcia f je integrovateľná na $\langle 1, \infty)$ a vypočítajte hodnotu jej integrálu.

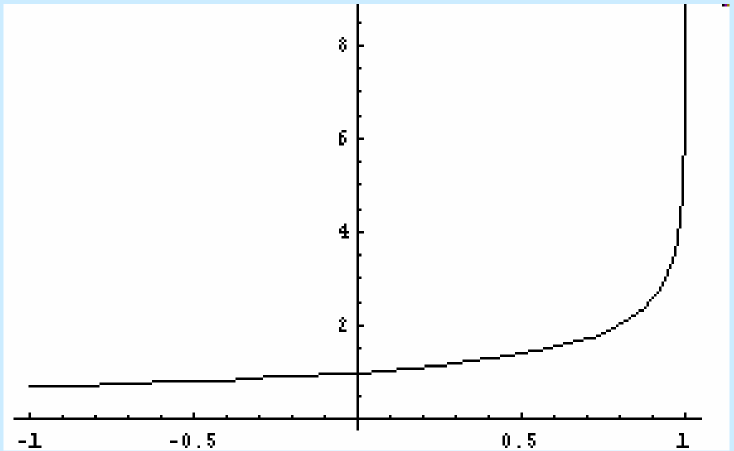


Limity integrálov

Veta 27.13:

Ak ľubovoľné dva integrály $\int_a^b f \, d\lambda$, $\int_b^c f \, d\lambda$, $\int_a^c f \, d\lambda$ existujú, potom tiež existuje tretí a platí rovnosť $\int_a^b f \, d\lambda + \int_b^c f \, d\lambda = \int_a^c f \, d\lambda$

Priklad 13 : Ukážte, že integrál $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt$ existuje pre každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ a výslednú funkciu f môžeme vyjadriť ako mocninný rad.



Veta 27.14:

Nech $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Nech funkcia f je integrovateľná na intervale (a, v) pre každé $v \in (a, b)$. Potom funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) vtedy a len vtedy, keď existuje číslo M také, že

$$\int_a^v |f| \,\mathrm{d}\lambda \leq M \text{, pre každé } v \in (a, b).$$

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) potom

$$\int_b^b f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{v \to b-} \int_a^v f \,\mathrm{d}\lambda,$$

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale (u, b) pre každé $u \in (a, b)$. Potom funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) vtedy a len vtedy, keď existuje číslo M také, že

$$\int_u^b |f| \,\mathrm{d}\lambda \leq M \text{, pre každé } u \in (a, b).$$

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) potom

$$\int_b^b f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{u \to a+} \int_u^b f \,\mathrm{d}\lambda,$$

Priklad 14 : Ukážte, že integrál $\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, \mathrm{d}x$ existuje a vypočítajte ho.

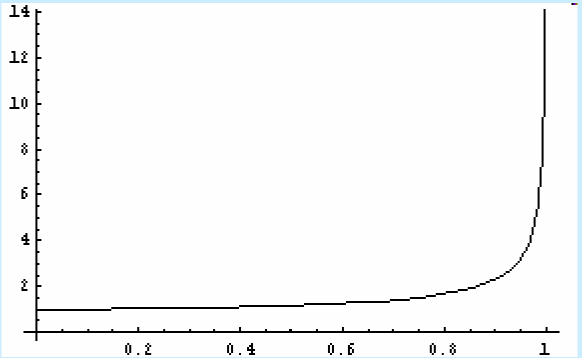
Veta 27.15:

Nech $-\infty \le a \le b \le \infty$. Nech funkcia $f(x) \ge 0$, pre každé $x \in \langle a, b \rangle$.
Ak funkcia f je integrovateľná na intervale (a, v) pre každé $v \in (a, b)$. Potom funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) vtedy a len vtedy, keď existuje limita $\lim\limits_{v \to b-} \int_a^v f \, \mathrm{d}\lambda$ a integrál funkcie f na intervale (a, b) je

$$\int_b^b f \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{v \to b-} \int_a^v f \, \mathrm{d}\lambda,$$

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale (u, b) pre každé $u \in (a, b)$. Potom funkcia f je integrovateľná na intervale (a, b) vtedy a len vtedy, keď existuje $\lim\limits_{u \to a+} \int_u^b f \, \mathrm{d}\lambda$. A integrál na intervale (a, b) je $\int_b^b f \, \mathrm{d}\lambda = \lim\limits_{u \to a+} \int_u^b f \, \mathrm{d}\lambda$.

Priklad 15 : Vypočítajte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$



Priklad 16 : Ukážte, že pre každé $\alpha > 1$ je rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergentný.

Veta 27.15:

Nech a a b sú čísla $a < b$. Nech funkcie Df a Dg majú limity (sprava, zľava) v bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ a nech funkcie f a g sú funkcie takmer primitívne k Df, Dg na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)Dg(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b Df(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$