26. Primitívna funkcia

Definícia 26.1 :

Funkcia F *sa nazýva* *primitívna* *k funkcií* f *na otvorenom intervale* I, *ak* DF(x) = f(x), *pre každý bod* $x \in$ I.

Priklad 1 : Zistite k akej funkcií je primitívna funkcia $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, pre $x \in (1, \infty)$.

Priklad 2 : Zistite k akej funkcií je primitívna funkcia $\operatorname{arctg} x$, pre $x \in (1, \infty)$.

Veta 26.1 :

Ak F je primitívna funkcia k funkcií f na otvorenom intervale potom funkcia G je primitívna funkcia k f na intervale I vtedy a len vtedy, keď existuje také číslo c, že G(x)=F(x) + c pre každé $x \in$ I.

Priklad 3 : Ukážte $\int \cos x \, dx = \sin x$, pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Príklady primitívnych funkcií :

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),\ n \geq 0,\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{pre } x \in (0, \infty),\ \alpha \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x \qquad \text{pre } x \in (0, \infty)$$

$$\int e^x \, dx = e^x \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),\ a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} \qquad \text{pre } x \in \left(-|a|, |a|\right),\ a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),\ a \neq 0$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x \qquad \text{pre } x \in \left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{cotg} x \qquad \text{pre } x \in \left(n\pi, (n+1)\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{pre } x \in \left(2n\pi, (2n+1)\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{pre } x \in \left((2n-1)\pi, 2n\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\left(\cos x\right) \qquad \text{pre } x \in \left(\left(2n-\tfrac{1}{2}\right)\pi, \left(2n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\left(-\cos x\right) \qquad \text{pre } x \in \left(\left(2n+\tfrac{1}{2}\right)\pi, \left(2n+\tfrac{3}{2}\right)\pi\right),\ n \in \mathrm{Z}$$

Veta 26.2:

Nech n je prirodzené číslo. Nech F_j je primitívna funkcia k funkcií f_j na otvorenom intervale I, a nech c_j je číslo pre každé $j = 1, 2, ..., n$. Potom $F = \sum_{j=1}^{n} c_j F_j$ je primitívna funkcia k funkcií $f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ na intervale I.

Substitúcia

Veta 26.3:

Nech F je primitívna funkcia k funkcií f na otvorenom intervale J. Nech g je funkcia diferencovateľná v každom bode otvoreného intervalu I taká, že $g(x) \in$ J, pre každé $x \in$ I. Potom zložená funkcia $F \circ g$ je primitívnou funkciou k funkcií $(f \circ g)\mathrm{D}g$ na intervale I.

t.j. $\int f(g(x))\mathrm{D}g(x)\,dx = F(g(x)), \quad x \in I$

Priklad 4 : Vypočítajte $\int \sin^3 x \cos x\,dx$, pre $x \in (-\infty, \infty)$.

Priklad 5 : Vypočítajte primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{x}{1+x^2}$ na $x \in (-\infty, \infty)$.

Metóda per partes

Veta 26.4:

Nech f a g sú funkcie diferencovateľné v každom bode otvoreného intervalu I a nech H bude primitívna funkcia k funkcií $g\mathrm{D}f$ na intervale I. Potom $fg - H$ je primitívna funkcia k funkcií $f\mathrm{D}g$ na intervale I.

t.j. $\int f(x)\mathrm{D}g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)\mathrm{D}f(x)\,dx$

Priklad 6 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií xe^x na $x \in (-\infty, \infty)$.

Priklad 7 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{\ln x}{x}$ na $x \in (0, \infty)$.

Priklad 8 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $x^n e^x$ na $x \in (-\infty, \infty)$, $n \geq 0$, celé.

Racionálne funkcie

Priklad 9 : Nech a je reálne číslo a $n > 1$, nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{1}{(x-a)^n}$.

Priklad 10 : Nech $n \in \mathrm{N}$, nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.

Priklad 11 : Nech a, b, p, q sú reálne čísla, $n \in \mathrm{N}$, nájdite primitívnu funkciu k funkcií

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}.$$

Niektoré iracionálne funkcie

Nech a, b, c, d sú reálne čísla $n_1, n_2, ..., n_k$ sú prirodzené čísla. Ak je funkcia f získaná z konštánt, z x a z funkcií

$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ..., $\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pomocou súčtu, odčítania, násobenia a podielu, potom substitúcia $y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, kde n dostaneme ako súčin $n_1, n_2, ..., n_k$. Touto substitúciou sa redukuje problém na nájdenie primitívnej funkcií k racionálnej funkcií.

Priklad 12 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$.

Nech $a, b, c,$ sú reálne čísla $a \neq 0$. Nech funkcia f je získaná pomocou konštánt, x a funkcie $\sqrt{ax^2+bx+c}$ pomocou súčtu, odčítania, násobenia a podielu. Problém nájdenia primitívnej funkcie k f pomocou nasledujúcich substitúcií redukujeme na nájdenie primitívnej funkcie k racionálnej funkcií.

Eulerové substitúcie :

1. Ak funkcia ax^2+bx+c má reálny koreň γ, potom použijeme substitúciu

$$y=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\gamma}$$

2. Ak $a > 0$, potom použijeme substitúciu $y=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}$

Eulerové substitúcie (pokračovanie):

3. Ak $c > 0$, potom použijeme substitúciu

$$y = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$$

Priklad 13 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Priklad 14 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Priklad 15 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-1\right)}$.

Niektoré transendentálne funkcie

Nech f je funkcia, ktorú môžeme získať z funkcií cos a sin pomocou súčtu, odčítania, násobenia a podielu, potom použijeme substitúciu

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

kde x je definovaná na intervale $\left((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\right)$

Priklad 16 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$.

Funkcia g má známu primitívnu funkciu :

$$\int g(\sin x)\cos x\, dx = \int g(y)\, dx$$

$$\int g(\cos x)\sin x\, dx = -\int g(y)\, dx$$

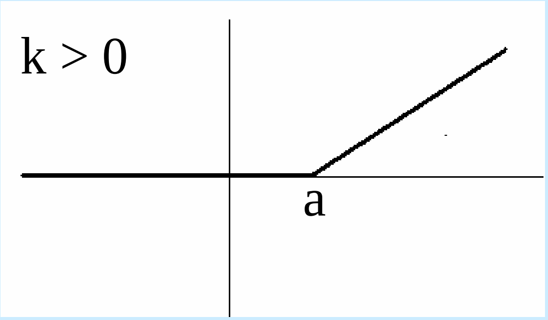
$$\int g(\exp(x))\, dx = \int \frac{g(y)}{y}\, dx$$

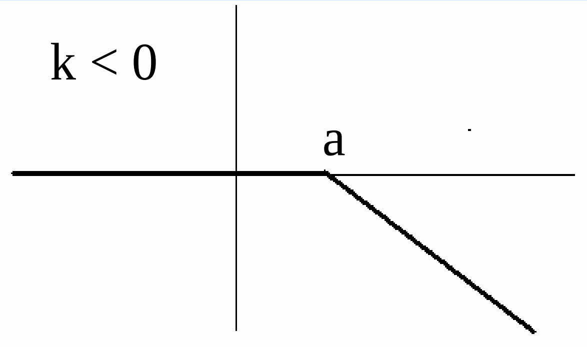
Priklad 17 : Nájdite primitívnu funkciu k funkcií $\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+1}$.

Podmienky existencie primitívnych funkcií

Priklad 18 : Nech a a k sú čísla. Nech $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x\le a \\ k(x-a) & \text{pre} \quad x\ge a \end{cases}.$

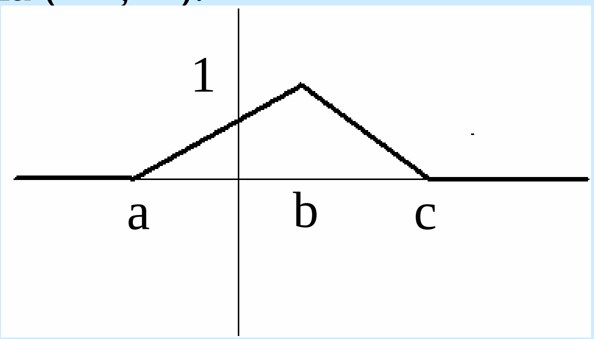
Ukážte, že funkcia g má primitívnu funkciu na (–∞, ∞).





Priklad 19 : Nech a, b, c sú čísla také, že $a < b < c$. Nech $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x\le a \\ 1 & \text{pre} \quad x=b \\ 0 & \text{pre} \quad x\ge c \end{cases}$

a nech funkcia f je spojitá na (–∞, ∞) a na intervale $\langle a,b\rangle$ aj $\langle b,c\rangle$ afinná.
Ukážte, že funkcia f má primitívnu funkciu na (–∞, ∞).



Veta 26.5:

Nech a, b sú čísla také, že $a < b$, $w \in \langle a, b\rangle$ a c je ľubovoľné číslo. Ak f je funkcia po kúskoch afinná na intervale $\langle a, b\rangle$, potom existuje funkcia F spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ taká, že $F(w) = c$ a $DF(x) = f(x)$, pre každé $x \in (a, b)$.

Priklad 20 : Nech u, v sú čísla také, že $u < v$ a nech c ľubovoľné číslo. Nech f je funkcia taká, že

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, u) \\ c & \text{pre} \quad x \in \langle u, v\rangle \\ 0 & \text{pre} \quad x \in (v, \infty) \end{cases}$$

Ukážte, že funkcia existuje F spojitá na $(-\infty, \infty)$ taká, že $DF(x) = f(x)$.

Veta 26.6:

Nech a a b sú čísla také, že $a < b$. Nech f je funkcia po kúskoch konštantná na intervale $\langle a, b\rangle$, nech $w \in \langle a, b\rangle$ a nech c je ľubovoľné číslo. Potom existuje funkcia F spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ také, že $F(w) = c$ a $DF(x) = f(x)$, v každom bode $x \in (a, b)$ také, že funkcia f je spojitá v x.

Veta 26.7:

Nech a, b sú čísla také, že $a < b$. Nech f je funkcia spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, nech $w \in (a, b)$ a nech c je číslo. Potom existuje jediná funkcia F, spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ také, že $F(w) = c$ a $DF(x) = f(x)$, pre každé $x \in (a, b)$.

Veta 26.8:

Funkcia spojitá na otvorenom intervale má primitívnu funkciu na tomto intervale.

Priklad 21 : Nech $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pre} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x = 0 \end{cases}$, potom funkcia F je diferencovateľná v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$

Definícia 26.2 :

Funkcia F *sa nazýva takmer primitívnou k funkcií f na otvorenom kompaktnom intervale* I, *ak funkcia* F *je spojitá na* I *a množina bodov* $x \in$ I, *pre ktoré neplatí rovnosť* $\mathrm{DF}(x) = f(x)$ *je spočítateľná.*

Príklad 22 : Nech f je charakteristická funkcia intervalu $\langle 0, \infty)$. Ukážte, že existuje takmer primitívna funkcia k funkcií f.