25. Diferenciál funkcií

Definícia 25.1 :

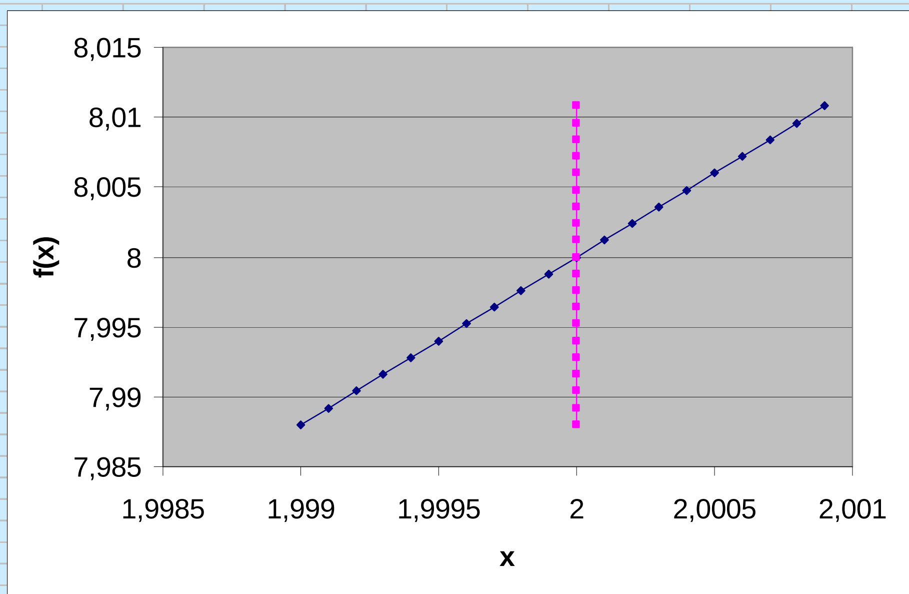
Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x, potom lineárna funkcia l definovaná

$$l(u) = \left(\mathrm{D}f\,(x)\right)u \quad \textit{pre každé } u \in (-\infty, \infty)$$

sa nazýva diferenciál funkcie f v bode x a označuje d*f(x)*

Priklad 1 : Nech $f(x) = x^3$, pre každé $x \in (-\infty,\infty)$. Vypočítajte diferenciál funkcie v bode 2.

i	xi		f(x)	f(xi) - f(xi-1)	
1	1,999	2	7,988006		
2	1,9991	2	7,989205	0,001199	11,9886
3	1,9992	2	7,990404	0,001199	11,9898
4	1,9993	2	7,991603	0,001199	11,991
5	1,9994	2	7,992802	0,001199	11,9922
6	1,9995	2	7,994001	0,001199	11,9934
7	1,9996	2	7,995201	0,001199	11,9946
8	1,9997	2	7,996401	0,0012	11,9958
9	1,9998	2	7,9976	0,0012	11,997
10	1,9999	2	7,9988	0,0012	11,9982
11	2	2	8	0,0012	11,9994
12	2,0001	2	8,0012	0,0012	12,0006
13	2,0002	2	8,0024	0,0012	12,0018
14	2,0003	2	8,003601	0,0012	12,003
15	2,0004	2	8,004801	0,0012	12,0042
16	2,0005	2	8,006002	0,001201	12,0054
17	2,0006	2	8,007202	0,001201	12,0066
18	2,0007	2	8,008403	0,001201	12,0078
19	2,0008	2	8,009604	0,001201	12,009
20	2,0009	2	8,010805	0,001201	12,0102
	diferencia		**0,0001**		



Veta 25.1 :

Funkcia f je diferencovateľná v bode x, práve vtedy, keď existuje lineárna funkcia l taká, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)-l(u)}{u}=0$

Ak l je lineárna funkcia pre ktorú platí $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)-l(u)}{u}=0$,

potom d $f(x) = l$

Definícia 25.2 :

Daná je funkcia f a funkcia d $f(x)$, ktorej definičným oborom je množina všetkých bodov, kde funkcia f je diferencovateľná (definujeme deriváciu ako funkciu Df), a ktorej hodnoty d $f(x)$ v každom takom bode x sú diferenciálom f v x sa nazýva diferenciálom funkcie f.
(v tomto prípade hodnoty diferenciálu df nie sú čísla ale lineárne funkcie (lineárne formy))

Priklad 2 : Nech $f(x) = x^2 + 3x^5$, pre každé $x \in (-\infty,\infty)$. Vypočítajte diferenciál funkcie.

Definícia 25.3 :

Súčin $\Phi = g\,\mathrm{d}h(x)$ funkcie g (jej hodnoty sú čísla) a diferenciálu dh funkcie h je diferenciálna forma na množine M, akk funkcia g je definovaná v každom bode množiny M (množina M je časťou definičného oboru funkcie g) a funkcia h je diferencovateľná v každom bode množiny M.
Potom hodnota $\Phi(x)$ diferenciálnej formy Φ v každom bode $x \in$ M je lineárna forma $g(x)\,\mathrm{d}h(x)$ taká, že funkcia $u \to g(x)\,\mathrm{d}h(x)\,(u) = g(x)\,\mathrm{D}h(x)u$, $u \in (-\infty, \infty)$

Priklad 3 : Nech $g(x) = \sqrt{6+x-x^2}$, $h(x) = \sqrt[3]{2+x-x^2}$, vypočítajte diferenciálnu formu $g\,\mathrm{d}h(x)$.

Veta 25.2 :

Nech f, g a h sú funkcie. Potom $\mathrm{d}f = g\,\mathrm{d}h$ vtedy a len vtedy, keď $\mathrm{D}f = g\,\mathrm{D}h$.

Definícia 25.4 :

Nech ξ je reálne číslo a f funkcia reálnej premennej diferencovateľnej v ξ. Derivácia, $\mathrm{D}f(\xi)$ funkcie f v bode ξ sa tiež nazýva derivácia f vzhľadom na x v ξ a označuje $\mathrm{D}_x f(\xi)$ alebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi)$.

Definícia 25.5 :

Nech Ω je neprázdna množina (nazýva sa priestor alebo stavový priestor)
Nech h je funkcia, ktorej definičný obor M je podmnožinou Ω.
Nech ξ je bodom patriacim do M. Nech $y = h(\xi)$ je hodnotou funkcie h v bode ξ.
Predpokladajme, že existuje otvorený interval V taký, že

$$y \in \mathrm{V} \subset h(\mathrm{M})=\{h(\omega):\omega\in \mathrm{M}\}$$

Nech f je takou funkciou, že jej definičný obor je podmnožinou Ω.
Funkciu f nazývame diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ξ ak existuje funkcia F reálnej premennej, diferencovateľná v bode y taká, že

$$f(\omega)=\mathrm{F}(h(\omega)),$$

pre každé $\omega\in \mathrm{M}$ také, že $h(\omega)\in \mathrm{V}$.
Číslo $\mathrm{DF}(y)=\mathrm{DF}(h(\xi))$ sa nazýva derivácia funkcie f vzhľadom na funkciu h v bode ξ a označujeme ju $\mathrm{D}_h f(\xi)$ alebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}(\xi)$.

Priklad 4 : Nech Ω=R a $f(x) = x^2 + 3x^{10}$ a $h(x)= x^2$. Ukážte, že funkcia f je diferencovateľná vzhľadom na h v každom bode $\xi \neq 0$ a vypočítajte deriváciu f vzhľadom na h v každom bode.

Veta 25.3 :

Nech Ω=R. Nech funkcia h je diferencovateľná v bode $\xi \in \Omega$ a nech funkcia f je diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ξ. Potom funkcia f je diferencovateľná v ξ a platí :

$$\mathrm{D}f(\xi) = \mathrm{D}_h f(\xi).\mathrm{D}h(\xi).$$

Veta 25.4 :

Nech n je prirodzené číslo. Nech f_j je funkcia diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ω a nech c_j sú čísla, j=1,2, ..., n. Potom funkcia $f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ je diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ω a platí :

$$\mathrm{D}_h f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{D}_h f_j(\omega)$$

Priklad 5 : Lampa je zavesená vo výške H nad úrovňou cesty. Chlapec výšky h, $0<h<H$ ide alebo beží po ceste. Rýchlosť chlapca, ktorú dosiahol je známa a závislá od času. Vypočítajte akou rýchlosťou rastie jeho tieň.

Veta 25.5 :

Nech f a g sú funkcie diferencovateľné vzhľadom na funkciu h v bode ω. Potom funkcia fg je diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ω a

$$\mathrm{D}_h(fg)(\omega) = \mathrm{D}_h f(\omega)\, g(\omega) + f(\omega)\, \mathrm{D}_h\, g(\omega)$$

Ak naviac $f(\omega)\neq 0$, potom funkcia $\dfrac{g}{f}$ je tiež diferencovateľná vzhľadom na h v bode ω a

$$D_h\left(\frac{g}{f}\right)(\omega) = \frac{f(\omega)D_h g(\omega) - D_h f(\omega)g(\omega)}{f^2(\omega)}$$

Veta 25.6 :

Nech funkcia f je diferencovateľná vzhľadom na funkciu g v bode ω a nech g je diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ω. Potom funkcia f je diferencovateľná vzhľadom na funkciu h v bode ω a

$$\mathrm{D}_h f(\omega) = \mathrm{D}_g f(\omega)\, \mathrm{D}_h\, g(\omega)$$

Priklad 6 : Plyn je pumpovaný konštantným tlakom do balónu s konštantnou veľkosťou ω. Ako rýchlo rastie polomer *r* balónu ?

Veta 25.7 :

Nech funkcia *f* je diferencovateľná vzhľadom na funkciu *g* a funkcia *g* je diferencovateľná vzhľadom na funkciu *f* v bode ω. Potom

$$D_g f(\omega) D_f g(\omega) = 1$$

Priklad 7 : Vypočítajte deriváciu povrchu P, kocky vzhľadom na jej objem V závislý na strane *s*.