9. Geometrický rad, suprémum, infimum

Veta 9.1 :

Nech $0 \le r < 1$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ je konvergentný a platí $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Priklad 1 : Vypočítajte $s = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{7 \; 3^{i+3}}{6^i}$.

Priklad 2 : Je daná postupnosť pre ktorú platí $a_0 = 1$ a $a_m = \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4} a_{m-1}$.

Vypočítajte súčet členov tejto postupnosti.

Veta 9.2 :

Nech a_n sú nezáporné čísla a $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ pre každé $n \in \mathrm{N}$. Rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentný vtedy a len vtedy, keď postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená. A ak rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentný, tak

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sup \{s_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

Veta 9.3 (Porovnávacie kritérium) :

Nech $0 \le a_n \le b_n$ pre každé $n \in \mathrm{N}$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Veta 9.4 :

Nech $0 \le r < 1$, $0 \le a$ a $0 \le a_n \le a\, r^n$ pre každé celé nezáporné číslo n. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentný a platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \frac{a}{1-r}$

Veta 9.5 :

Ak $0 \le \rho < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n$ je konvergentný a platí $\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

Priklad 3 : Dokážte, že rad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ je konvergentný.

Veta 9.6 : (Archimedova vlastnosť)

Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo m, že $\frac{1}{m} < \varepsilon$

Ku ľubovoľnej dvojici čísel a, $b > 0$ existuje také prirodzené číslo m, že $a < b\,m$

Priklad 4 : Dokážte, že pre každé $x \geq 0$ je rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergentný.

Definícia 9.1 :

$a = \sup A$

1. $\forall x \in A : x \leq a$

2^1. $(\forall y \in R)((\forall x \in A : x \leq y) \Rightarrow a \leq y)$

2^2. $(\forall k \in R : k < a)(\exists x \in A : k < x)$

2^3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A : a - \varepsilon < x)$

Definícia 9.1 (pokračovanie) :

$b = \inf A$

1. $\forall x \in A : x \geq b$

2^1. $(\forall y \in R)((\forall x \in A : x \geq y) \Rightarrow b \geq y)$

2^2. $(\forall l \in R : l > b)(\exists x \in A : x < l)$

2^3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A : x < b + \varepsilon)$

Priklad 5 : Nájdite sup, inf nasledujúcej množiny $M = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in N \right\}$