8. Binomická veta a súčty radov

Definícia 8.1 :

Nech m a $n \geq 0$ sú celé čísla. Ak $0 \leq m \leq n$, položme $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Ak $m < 0 \leq n$ alebo $0 \leq n < m$, položme $\binom{n}{m} = 0$

Ak $n < 0$, potom $\binom{n}{m}$ nie je definované

Veta 8.1 :

Pre každé celé číslo $n \geq 0$ platia rovnosti $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Pre každé celé číslo m a každé celé $n \geq 0$ platí $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$ a $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

$\binom{k}{m}\binom{m}{n} = \binom{k}{n}\binom{k-n}{m-n} = \binom{k}{m-n}\binom{m-m+n}{n}$, platí pre ľubovoľné také celé čísla

k, n, m, že príslušné binomické koeficienty sú definované

Veta 8.2 :

Binomické koeficienty sú celé čísla.

Veta 8.3 :

Pre každé číslo x a každé nezáporné celé číslo n platí $(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$

Veta 8.4 (Binomická veta) :

Pre ľubovoľné čísla a, b a pre každé nezáporné celé číslo n platí

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

Definícia 8.2 :

Čísla $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ sa nazývajú čiastočné súčty členov postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Hovoríme, že číslo s je súčtom radu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, akk

1. Pre každé $n \in$ N, platí $\sum_{i=1}^{n} a_i \le s$

2[1]. Ak pre každé $n \in$ N, $\sum_{i=1}^{n} a_i \le v$, potom $s \le v$

Definícia 8.2 (pokračovanie) :

2^2. Ku každému číslu $t < s$ existuje také číslo $m \in$ N, že $t < \sum_{i=1}^{m} a_i$

2^3. Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo m, že $s - \varepsilon = \sum_{i=1}^{m} a_i$

Príklad 1 : Dokážte $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

Príklad 2 : Nech $a_n = 1$, pre $n \in$ N. Vypočítajte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definícia 8.3 :

Rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sa nazýva konvergentný akk existuje s, ktoré spĺňa podmienky definície 7.2.

Veta 8.5 :

Konvergentný rad má práve jeden súčet.

Príklad 3 : Nech $m, n \in$ N $(n \leq m)$ a $a_i \geq 0$ je pre každé $i \geq n$ a $a_j = 0$ je pre každé $j \geq m$. Potom rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentný a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{j=1}^{m} a_j$

Priklad 4 : Ak $a_n = \frac{1}{n}$, pre $n \in \mathrm{N}$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie je konvergentný

Veta 8.6 :

Nech $l \in \mathrm{N}$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď rad $\sum_{n=l+1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Ak oba rady sú konvergentné, potom $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{\infty} a_i$

Veta 8.7 :

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a $a_n \geq 0$. Nech $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ je taká postupnosť čísel, že $q_0 = 0$ a pre n=1, 2, ... je $q_{n-1} < q_n$. Položme $b_n = \sum_{i=q_{n-1}+1}^{q_n} a_n$, pre $n \in \mathrm{N}$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný a platí $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Veta 8.8 :

Nech a_n sú nezáporné čísla. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď rad $\sum_{n=q}^{\infty} a_{n+1-q}$ je konvergentný.

Ak sú oba rady konvergentné, potom $\sum_{i=q}^{\infty} a_{i+1-q} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Veta 8.9 :

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a_n sú nezáporné čísla a c je nezáporné číslo.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ je konvergentný a platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Veta 8.10 :

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady s nezápornými členmi. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Veta 8.11 :

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre každé $n=1, 2, \ldots$ a nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak navyše pre niektoré $m \in \mathrm{N}$ platí $a_m < b_m$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$