# 7. Konečné rady a súčty

**Definícia 7.1** :

Nech $p$ je ľubovoľné celé číslo a nech $m$ je nezáporné celé číslo. Nech pre každé celé číslo $i$ s vlastnosťou $p \leq i \leq p + m$ je dané číslo $a_i$. Čísla $\sum_{i=p}^{p+m} a_i$ (čiastočný súčet $s_n$ ) a $\prod_{i=p}^{p+m} a_i$ sú definované rekurentne takto :

$$\sum_{i=p}^{p} a_i = a_p; \quad \sum_{i=p}^{p+k+1} a_i = \sum_{i=p}^{p+k} a_i + a_{p+k+1}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\prod_{i=p}^{p} a_i = a_p; \quad \prod_{i=p}^{p+k+1} a_i = \left( \prod_{i=p}^{p+k} a_i \right) a_{p+k+1}, \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Priklad 1 : Vypočítajte $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

**Veta 7.1** (Veta o rozdelení čiastočných súčtov) **:**

Nech $p$ je celé číslo a nech $l$, $m$ sú také celé čísla, že $0 \le l < m$. Potom pre ľubovoľné čísla $a_i$, $i = p, p+1, p+2, \ldots, p+m$ platí :

$$\sum_{i=p}^{p+m} a_i = \sum_{i=p}^{p+l} a_i + \sum_{i=p+l+1}^{p+m} a_i \qquad \prod_{i=p}^{p+m} a_i = \left(\prod_{i=p}^{p+l} a_i\right) \prod_{i=p+l+1}^{p+m} a_i$$

**Veta 7.2** (Veta o posúvaní indexov čiastočných súčtov) **:**

Pre ľubovoľné celé čísla $p$, $q$ a pre každé celé číslo $m \ge 0$ platí :

$$\sum_{i=p}^{p+m} a_{i+q-p} = \sum_{i=q}^{q+m} a_i \qquad \prod_{i=p}^{p+m} a_{i+q-p} = \prod_{i=q}^{q+m} a_i$$

**Vlastnosti súčtov :**

**Veta 7.3 :**

Pre ľubovoľné prirodzené číslo $m$, ľubovoľné čísla $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a ľubovoľné číslo $c$ platí : $\sum_{i=1}^{m} c a_i = c \sum_{i=1}^{m} a_i$

Priklad 2 : Pre každé $n \in \mathrm{N}$ dokážte, že platí $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i$

Priklad 3 : Pre ľubovoľné číslo $q \neq 0$ dokážte $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$

**Veta 7.4 :**

Pre ľubovoľné prirodzené číslo $m$, ľubovoľné čísla $a_i$, $b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ platí :

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Priklad 4 : Vypočítajte súčet $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2^i i!}$

## Vlastnosti súčinov :

**Veta 7.5 :**

Nech $m \in \mathrm{N}$ a nech $a_i$, $b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ sú ľubovoľné čísla potom platí :

$$\prod_{i=1}^{m} a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{m} b_i\right)$$

**Veta 7.6 :**

Nech $m \in \mathrm{N}$ a nech $a_i \neq 0$, $b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ sú ľubovoľné čísla potom platí :

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \neq 0 \quad \text{a} \quad \prod_{i=1}^{m} \frac{b_i}{a_i} = \frac{\prod_{i=1}^{m} b_i}{\prod_{i=1}^{m} a_i}$$

## Veta 7.7 :

Nech $m \in N$ a nech $a_i$, $i = 1, 2, ..., m$ sú ľubovoľné čísla potom platí :

$$\left| \prod_{i=1}^{m} a_i \right| = \prod_{i=1}^{m} | a_i |$$

## Veta 7.8 :

Nech $m \in N$ a nech $a_i$, $i = 1, 2, ..., m$ sú ľubovoľné nezáporné čísla potom

platí : $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq 0$ $\prod_{i=1}^{m} a_i \geq 0$.

Ak $a_i > 0$, pre aspoň jedno $i = 1, 2, ..., m$, potom $\sum_{i=1}^{m} a_i > 0$

Ak $a_i > 0$, pre všetky $i = 1, 2, ..., m$, potom $\prod_{i=1}^{m} a_i > 0$

## Veta 7.9 :

Nech $m \in N$ a ak $a_i$, $b_i$, sú čísla, pre ktoré $a_i \leq b_i$ ; $i = 1, 2, ..., m$ potom $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i$

Ak $a_i < b_i$ pre aspoň jedno $i = 1, 2, ..., m$, potom $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{i=1}^{m} b_i$

## Veta 7.10 :

Nech $m \in \mathrm{N}$ a ak $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú ľubovoľné čísla, potom platí : $\left| \sum_{i=1}^{m} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| a_i \right|$

## Veta 7.11 :

Nech $m \in \mathrm{N}$ a nech $a_i$, $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú ľubovoľné čísla, potom

$$\left( \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \right) \qquad \text{Cauchyho nerovnosť}$$

Rovnosť vo vzťahu platí vtedy a len vtedy, keď existuje číslo $x$ s vlastnosťou $b_i = x\, a_i$, pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$ alebo keď existuje také číslo $y$, že $a_i = y\, b_i$ , pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$.