6. Rekurzívne definície, postupnosti, konečné rady

Definícia 6.1 :

Postupnosťou rozumieme funkciu, ktorej definičným oborom je podmnožina celých čísel a oborom hodnôt množina reálnych čísel ($a : Z \rightarrow R$)

Priklad 1 : Členy postupnosti $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}_{n=-2}^{\infty}$ sú $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

Priklad 2 : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=-2}^{\infty}$ nie je postupnosť, lebo existuje jeden člen $n=0$, pre ktorý postupnosť nie je definovaná.

Priklad 3 : Máme postupnosť 1, 5, 25, 125, 625, ...

Môžeme ju zapísať $\{5^n\}_{n=0}^{\infty}$, ale aj

rekurzívne $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 5\, a_n$

Rekurzívna definícia : I. určíme $\phi(p)$

II. pre každé $m>p$ určíme $\phi(m)$ pomocou $\phi(k)$ pre $p \leq k \leq m$

II'.určíme $\phi(k+1)$ pomocou $\phi(k)$, pre každé $k=p$, $p+1$, ...

Priklad 4 : Navrhnite vzorec alebo rekurentnú definíciu pre všetky postupnosti, ktorej prvé členy postupnosti sú 3, 15, 35, 63, 99, ...

Definícia 6.2 :

Nech a je číslo. Pre každé nezáporné celé číslo n definujeme jediné číslo a^n podľa princípu rekurzívnej definície :

$$a^0 = 1$$

$$a^{k+1} = a^k a, \text{ pre každé } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Vlastnosti :

Ak $a \neq 0$, potom $a^n \neq 0$, pre každé celé číslo $n \geq 0$

Ak $a > 0$, potom $a^n > 0$, pre každé celé číslo $n \geq 0$

Ak $a > -1$, potom $(1+a)^n \geq 1+na$, pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bernoulliho nerovnosť

Veta 6.1 :

Ak a je číslo, potom platí :

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \text{a} \quad \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

pre každé nezáporné celé číslo m, nezáporné celé číslo n

Ak $a \neq 0$, potom $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

pre ľubovoľné celé čísla m, n, také, že $0 \leq n \leq m$

Veta 6.2 :

Pre ľubovoľné čísla a, b a ľubovoľné celé číslo $n \geq 0$ platí :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Pre ľubovoľné čísla $a \neq 0$, b a pre ľubovoľné celé číslo $n \geq 0$ platí :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Veta 6.3 :

Ak $0 \leq a < b$, potom pre každé prirodzené číslo platí $a^n < b^n$

Ak $a < b \leq 0$, potom $a^n < b^n$ pre každé $n = 2k + 1$, $k \in Z$

$b^n < a^n$ pre každé $n = 2k$, $k \in Z$

Definícia 6.3 :

Ak a je číslo rôzne od nuly a n je nezáporné celé číslo, potom mocnina

a^n sa definuje vzorcom $(a)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$

Veta 6.4 :

Ak $a \neq 0$ a n je ľubovoľné celé číslo, potom $(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Veta 6.5 :

Ak a je číslo rôzne od nuly, potom platí :

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \text{a} \quad \left(a^m\right)^n = a^{mn} \quad \text{a} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

pre ľubovoľné čísla m, n

Veta 6.6 :

Pre ľubovoľné čísla $a \neq 0$, $b \neq 0$ a pre ľubovoľné číslo n platí :

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{a} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$