5. Celé čísla a matematická indukcia

Definícia 5.1 :

Množina prirodzených čísel je najmenšia podmnožina množiny reálnych čísel R,

pre ktorú platí : i) $1 \in N$

ii) Ak množina N obsahuje číslo k, tak obsahuje aj číslo $k+1$

Veta 5.1 :

Prirodzené čísla sú kladné čísla.

Veta 5.2 :

Ak n je prirodzené číslo rôzne od 1, tak aj $n - 1$ je prirodzené číslo.

Dôkaz matematickou indukciou :

Predpokladajme, že každému prirodzenému číslu n je priradený (pravdivý alebo nepravdivý) výrok $\mathbf{P}(\boldsymbol{n})$. Ak

I. výrok $\mathbf{P(1)}$ je pravdivý

II. pre každé prirodzené číslo k z platnosti výroku $\mathbf{P}(\boldsymbol{k})$ vyplýva platnosť výroku $\mathbf{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$, potom výrok $\mathbf{P}(\boldsymbol{n})$ platí pre každé prirodzené číslo

Tvrdenie :

Ak m, n sú prirodzené čísla, potom aj $m + n$ je prirodzené číslo

aj $m\,n$ je prirodzené číslo

Tvrdenie :

Množina prirodzených čísel nie je zhora ohraničená

Definícia 5.2 :

Celé číslo je každé číslo, ktoré sa dá zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel.

Vlastnosti :

Súčet rozdiel, súčin celých čísel sú celé čísla. Kladné celé čísla sú prirodzené čísla

Veta 5.3 :

Ak c je celé číslo, tak neexistuje celé číslo x, pre ktoré by platilo

$$c < x < c+1$$

Veta 5.4 :

V každej neprázdnej podmnožine množiny prirodzených čísel existuje najmenší prvok (minimum)

Veta 5.5 :

Nech L je neprázdna podmnožina celých čísel, pre ktorú existuje celé číslo l také, že žiadny prvok množiny L nie je menší ako l. Potom v množine L existuje najmenší prvok.

Nech K je neprázdna podmnožina celých čísel, pre ktorú existuje celé číslo k také, že žiadny prvok množiny K nie je väčší ako k. Potom v množine K existuje najväčší prvok.

Dôsledok (Zovšeobecnený princíp matematickej indukcie) :

Nech q je celé číslo. Predpokladajme, že každému celému číslu $n \geq q$ je priradený (pravdivý alebo nepravdivý) výrok P(n). Ak pre každé celé číslo $m \geq q$ z platnosti P(k) pre každé k ($q \leq k < m$) vyplýva platnosť výroku P(m), tak pre každé $n \geq q$ je pravdivý výrok P(n).

Veta 5.6 : **Euklidová veta o delení**

Ak m, n sú celé čísla a $n > 0$, tak existuje práve jedno celé číslo q a práve jedno celé číslo r tak, že $m = nq + r$ a zároveň $0 \leq r < n$

Definícia 5.2 :

Nech a, b sú celé čísla. Celé číslo, ktoré delí a zároveň delí b sa nazýva spoločný deliteľ čísel a, b.

Ak $d > 0$ a je spoločným deliteľom a, b a každý spoločný deliteľ čísel a, b je deliteľom čísla d, tak d sa volá najväčší spoločný deliteľ čísel a, b.

Veta 5.7 :

Nech a, b sú celé čísla, z ktorých aspoň jedno sa nerovná nule. Potom existuje práve jeden najväčší spoločný deliteľ $d = \mathrm{nsd}(a, b)$ čísel a, b.

Pre dané celé číslo m existuje také celé číslo x, y, že $m = xa + yb$ práve vtedy, keď m je deliteľné číslom d. Naviac platí, že najväčší spoločný deliteľ d čísel a, b je najmenšie možné kladné celé číslo, pre ktoré existujú také celé čísla x, y, že $d = xa + yb$.

Veta 5.8 :

Ak a, b sú také celé čísla, že sa nerovnajú súčasne nule, tak pre každé celé číslo z platí :

$$\mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(a - bz, d) = \mathrm{nsd}(d, b - az)$$

Definícia 5.3 :

Nenulové čísla a, b sa nazývajú nesúdeliteľné, ak ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

Kladné celé číslo p sa volá prvočíslo, ak $p \neq 1$ a ak jedinými kladnými deliteľmi čísla p sú 1, p.

Najmenší spoločný násobok kladných čísel a, b definujeme ako najmenšie také kladné celé číslo, ktoré je deliteľné číslom a aj číslom b.