4. Niektoré špeciálne funkcie

Definícia 4.1 :

Funkcia sa nazýva lineárna funkcia, ak jej definičným oborom je $(-\infty,\infty)$ a existuje také číslo k (koeficient lineárnej funkcie f), že

$$f(x)= kx \qquad \text{pre každé } x\in(-\infty,\infty)$$

Veta 4.1 :

Ak f je lineárna funkcia, tak

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$\text{pre každé } x\in(-\infty,\infty) \text{ a } y\in(-\infty,\infty)$$

$$f(ax)=a\,f(x)$$

$$\text{pre každé } a, \text{ a každé } x\in(-\infty,\infty)$$

Ak je daná funkcia $f(ax)=a\,f(x)$ pre každé a, a každé $x\in(-\infty,\infty)$,

potom funkcia f je lineárna.

Veta 4.2 :

Ak f je lineárna funkcia a $v \neq 0$, potom $f(x) = \dfrac{f(v)}{v} x$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

Definícia 4.2 :

Hovoríme, že funkcia f je afinná na intervale I, ak existujú také čísla k, q, že

$f(x) = kx + q$ pre každé $x \in I$

Veta 4.3 :

Funkcia f je afinná v neprázdnom intervale I vtedy a len vtedy, keď existuje také

čísla k, že $f(v) - f(v) = k\,(v - u)$ pre každé $u \in I$, $v \in I$

Veta 4.4 :

Nech f je afinná funkcia v na intervale I a nech $u \in I$ a $v \in I$, $u \neq v$. Potom pre

každé $x \in$ I platí : $$f(x) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} x + \frac{f(u)v - f(v)u}{v - u}$$

Definícia 4.3 :

Absolútna hodnota čísla x je číslo $|x|$ definované podmienkami :

$$|x| = \begin{cases} x & ,\text{ak } x \geq 0 \\ -x & ,\text{ak } x \leq 0 \end{cases}$$

Veta 4.5 :

Ak $x \neq 0$, potom $|x| > 0$.

Pre každé číslo x platí rovnosť $|x| = |-x|$ a nerovnosti $-|x| \leq x \leq |x|$

Veta 4.6 :

Nerovnosti $-a \leq x \leq a$ platia práve vtedy, keď platí nerovnosť $|x| \leq a$

Veta 4.7 :

Pre každé číslo x a každé číslo y platia nerovnosti

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$$

Veta 4.8 :

Pre každé číslo x a každé číslo y platí rovnosť $|x\,y| = |x||y|$

Pre každé číslo $x \neq 0$ a každé číslo y platí rovnosť $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$

Priklad 1 : Nájdite množinu všetkých x, pre ktoré platí :

$$4|x+2| - |x-1| - x < 3$$

Definícia 4.4 :

Funkcia f sa nazýva homogénna kvadratická funkcia (kvadratická forma)

akk existuje číslo a také, že pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ platí :

$$f(x) = ax^2$$

$a \neq 0$ hovoríme, že kvadratická forma f je definitná

$a > 0$ hovoríme, že kvadratická forma f je kladne definitná

$a < 0$ hovoríme, že kvadratická forma f je záporne definitná

Definícia 4.5 :

Funkcia g s definičným oborom $(-\infty,\infty)$ sa nazýva kvadratická funkcia, akk existujú čísla a, b, c tak, že

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{pre všetky } x \in (-\infty,\infty)$$

Čísla a, b, c sa nazývajú koeficienty kvadratickej funkcie g

Veta 4.9 :

Nech g je kvadratická funkcia a nech u, v, w sú také body, že $u \neq v$, $v \neq w$, $w \neq u$. Potom pre všetky $x \in (-\infty,\infty)$ platí : $g(x) = ax^2 + bx + c$,

pričom

$$a = \frac{g(u)(v-w) + g(v)(w-u) + g(w)(u-v)}{(u-w)(v-w)(u-v)}$$

$$b = \frac{g(u)(w-v)(v+w) + g(v)(v-u)(u+w) + g(w)(u-w)(u+v)}{(u-w)(v-w)(u-v)}$$

$$c = \frac{g(w)(u-v)uv + g(u)(v-w)vw + g(v)(w-u)uw}{(u-w)(v-w)(u-v)}$$

Definícia 4.6 :

Nepriama úmernosť je funkcia f s definičným oborom $\{x : x \neq 0\}$ a číslom $k \neq 0$ takým, že : $f(x) = \dfrac{k}{x}$, pre všetky $x \neq 0$

Číslo k sa nazýva koeficient nepriamej úmernosti.

Definícia 4.7 :

Nech a, b, c, d sú také čísla, že c a d sa nerovnajú súčasne nule. Potom funkciu $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nazveme lineárne lomená funkcia na definičnom obore

$$M = \begin{cases} (-\infty, \infty) & \text{, ak } c = 0 \\ \{x : x \neq \dfrac{-d}{c}\} & \text{, ak } c \neq 0 \end{cases}$$

Veta 4.10 :

Nech g je lineárne lomená funkcia, ktorá nie je afinná a nech u, v, w sú také body jej definičného oboru, že $u \neq v$, $v \neq w$, $w \neq u$. Potom rovnosť

$g(x) = t + \dfrac{k}{x-s}$, platí pre všetky x z definičného oboru $\{\ x : x \neq s\}$

funkcie g, pričom čísla k, s, t sú dané vzťahmi :

$$k = -\frac{(v-w)(g(v)-g(w))(w-u)(g(w)-g(u))(u-v)(g(u)-g(v))}{\left(g(u)(v-w)+g(v)(w-u)+g(w)(u-v)\right)^2}$$

$$s = \frac{ug(u)(v-w)+vg(v)(w-u)+wg(w)(u-v)}{g(u)(v-w)+g(v)(w-u)+g(w)(u-v)}$$

$$t = -\frac{g(u)u(g(v)-g(w))+g(v)v(g(w)-g(u))}{g(u)(v-w)+g(v)(w-u)+g(w)(u-v)}+$$

$$+\frac{g(w)w(g(u)-g(v))}{g(u)(v-w)+g(v)(w-u)+g(w)(u-w)}$$

Priklad 2 : Ak g je taká lineárne lomená funkcia, že $g(1) = 3$, $g(-3) = 5$, $g(5) = 2$. Vypočítajte hodnotu $g(2)$

Definícia 4.8 :

Charakteristická funkcia množiny S je taká funkcia *f*, ktorej definičným oborom je množina $(-\infty,\infty)$ všetkých čísel, $f(x)=\begin{cases}1 & \text{pre kazdé } x\in S\\ 0 & \text{pre kazdé } x\notin S\end{cases}$

Priklad 3 : $f(x)$ je charakteristická funkcia intervalu $\langle 0,2\rangle$

Priklad 4 : Nájdite všetky body *x*, pre ktoré

$$(x-3)\chi_{(-\infty,2)}(x)+(3-5x)\chi_{\langle 0,5\rangle}(x)+3\chi_{\langle 4,\infty)}(x)<2$$