2. Reálne čísla.

Dohoda :

- čísla označujeme písmenami
- vo vzorci alebo vzťahu jedno písmeno, aj keď sa vyskytuje viackrát označuje to isté číslo
- rôzne písmena môžu označovať rôzne čísla
- ľubovoľné písmeno alebo iný symbol označujúci číslo možno v hociktorom vzorci alebo vzťahu nahradiť iným písmenom alebo číslom, označujúcim to isté číslo- pravidlo substitúcie

Axiómy

Pre reláciu rovnosť :

1. Reflexívnosť : $a = a$; pre každé a
2. Symetrickosť : Ak $a = b$, potom $b = a$; pre každé a, b
3. Tranzitívnosť : Ak $a = b$ a zároveň $b = c$, potom $a = c$; pre každé a, b, c

4. Jednoznačnosť súčtu a súčinu : Ak $a = b$ a zároveň $c = d$, potom

$$a + c = b + d$$

$$a\,c = b\,d \qquad ; \text{ pre každé } a, b, c, d$$

5. Komutatívny zákon : $a + b = b + a$; pre každé a, b
6. Asociatívny zákon : $a + (b + c) = (a + b) + c$

$$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c \quad ; \text{ pre každé } a, b, c$$

Vlastnosť odčítania

7. Pre každé a, b existuje práve jedno x : $a + x = b$
8. Existuje jediné číslo nazývané nula, ktorého súčet s každým číslom a sa rovná a $\qquad a + 0 = 0 + a = a$

Axiómy (pokračovanie)

9. Ku každému a rôznemu od nuly a každému číslu b existuje jediné číslo x s vlastnosťou $a\, x = b$.

10. Existuje jediné číslo nazýva sa jedna, ktorého súčin s ľubovoľným číslom a sa rovná a.

11. Distributívny zákon : pre každé a, b, c ; $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$

Vlastnosti kladných čísel :

12. Pre každé číslo nastáva práve jedna z možnosti :

    a je kladné, $a = 0$, $-a$ je kladné

13. Ak a, b sú kladné čísla, potom aj čísla $a + b$, $a\,b$ sú kladné

14. $0 < 1$

Veta 2.1 :

Ak a, b sú kladné čísla, tak ich podiel $\frac{b}{a}$ je kladný.

Veta 2.2 :

Ak číslo a sa nerovná nule, tak $a\ a$ je kladné.

Veta 2.3 :

Pre ľubovoľné čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov $a < b$, $a = b$, $b < a$.

Veta 2.4 :

Ak $a < b$ a zároveň $b < c$, tak $a < c$.

Veta 2.5 :

Ak $a < b$, tak pre každé c platí $a + c < b + c$.

Veta 2.6 :

Ak $a < b$, a zároveň $c < d$, tak platí $a + c < b + d$.

Veta 2.7 :

Ak $a < b$, a zároveň $0 < c$, tak platí $a\ c < b\ c$.

Veta 2.8 :

Ak $a < b$, $c < d$ a a, c sú kladné čísla, tak $a\,c < b\,d$.

Veta 2.9 :

Ak číslo $a < b$ a zároveň c je kladné, tak $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Veta 2.10 :

Pre ľubovoľné čísla a, b platí $a \leq b$ alebo $b < a$, pričom tieto možnosti sa vzájomne vylučujú.

Veta 2.11 :

Ak $a \leq b \leq a$, tak $a = b$.

Veta 2.12 :

Ak súčasne platí $0 \leq a$, $0 \leq b$, tak $0 \leq a + b$

$$0 \leq a\,b.$$

Veta 2.13 :

Ak $a \leq b$, a zároveň $b \leq c$, tak $a \leq c$.

Ak $a \leq b$, tak pre každé c platí $a + c \leq b + c$.

Ak $a \leq b$, a zároveň $c \leq d$, tak $a + c \leq b + d$.

Ak $a \leq b$, a zároveň $0 \leq c$, tak $a\,c \leq b\,c$.

Ak $a \leq b$ a zároveň $c \leq d$ a zároveň $0 \leq a$ a zároveň $0 \leq c$, tak $a\,c \leq b\,d$.

Ak $a \leq b$, a zároveň $0 < c$, tak $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Veta 2.14 :

Ak $a < b$, $c \leq d$, tak $a + c < b + d$.

Definícia 2.1 :

A $\subseteq$ R , $a \in$ R .

a sa nazýva horným ohraničením A akk platí $(\forall x \in A)\, x \leq a$

a sa nazýva dolným ohraničením A akk platí $(\forall x \in A)\, x \geq a$

Množina A je zdola ohraničená akk existuje $a \in$ R, ktoré je dolným ohraničením množiny A.

Množina A je zhora ohraničená akk existuje $a \in$ R, ktoré je horným ohraničením množiny A.

Množina A je ohraničená akk je zhora i zdola ohraničená.

Tvrdenie :

A je ohraničená $\equiv$ $(\exists K > 0)(\forall x \in A)(-K \leq x \leq K)$.

Definícia 2.2 :

Maximálny prvok číselnej množiny je taký jej prvok, že každý iný jej prvok je od neho menší.

Minimálny prvok číselnej množiny je taký jej prvok, že každý iný jej prvok je od neho väčší.

Definícia 2.3 :

A $\subseteq$ R

$a \in$ R je supremum A akk

(1) a je horným ohraničením A

(2) a je najmenším horným ohraničením

$a \in$ R je infimum A akk

(1) a je dolným ohraničením A

(2) a je najväčším dolným ohraničením

Axiómy (pokračovanie)

15. Princíp supréma :

    Každá neprázdna zhora ohraničená množina má suprémum