12. Relatívne konvergentné rady a kritéria konvergencie

Definícia 12.1 :

Rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je relatívne konvergentný, akk ku každému ε > 0 existuje také prirodzené číslo m, že pre každé $k \geq m$ platí $\left| s - \sum_{i=1}^{k} a_i \right| < \varepsilon$

Veta 12.1 :

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, tak aj je relatívne konvergentný.

Definícia 12.2 :

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva rastúca akk pre každé $n \in \mathrm{N} : a_n < a_{n+1}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva klesajúca akk pre každé $n \in \mathrm{N} : a_n > a_{n+1}$.

Nech $a_n \geq 0$, pre $n \in \mathrm{N}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ sa nazýva rad so striedavými znamienkami.

Veta 12.2 (Leibnitzové kritérium)**:**

Nech $a_n \geq 0$, pre $n \in \mathrm{N}$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ je relatívne konvergentný,

ak i) postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca,

ii) $\inf\limits_{n \in \mathrm{N}} \{a_n\} = 0$

Veta 12.3 (Cauchyho odmocninové kritérium) **:**

Nech a_i, $i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné čísla a nech existuje prirodzené číslo q a číslo r tak, že $0 \leq r < 1$ a

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq r$, pre $n = q, q+1, q+2, \ldots$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný,

$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, pre $n = q, q+1, q+2, \ldots$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Veta 12.4 (D'Alembertovo podielové kritérium) **:**

Nech a_i, $i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné čísla rôzne od nuly a nech existuje prirodzené číslo q a číslo r tak, že $0 \le r < 1$ a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le r\text{, pre } n = q, q+1, q+2, \ldots\text{, tak rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentný,}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1\text{, pre } n = q, q+1, q+2, \ldots\text{, tak rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je divergentný.}$$

Veta 12.5 (Riemannova veta)**:**

Členy neabsolútne konvergentného radu je možné preusporiadať tak, aby nový rad mal za súčet ľubovoľné dopredu určené číslo alebo, aby bol divergentný.