11. Absolútne konvergentné rady a ich vlastnosti

Pre ľubovoľné číslo x označme :

$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x) \qquad \text{kladná časť čísla } x$$

$$x^- = \frac{1}{2}(|x| - x) \qquad \text{záporná časť čísla } x$$

Definícia 11.1 :

Nech $a_i \in$ R, pre $i \in$ N. Rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je absolútne konvergentný, akk sú konvergentné rady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ (kladné časti) a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ (záporné časti).

A platí $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$

Priklad 1 : Ukážte, že rad $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$ je konvergentný

Priklad 2 : Ak $|\,r\,|<1$, tak rad $\sum_{n=0}^{\infty} r^{n}$ je konvergentný a platí $\sum_{n=0}^{\infty} r^{n}=\frac{1}{1-r}$

Veta 11.1 :

Nech a_i, $i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné čísla potom platí : Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ je konvergentný, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Veta 11.2 (porovnávacie kritérium) **:**

Nech a_i, b_i $i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné čísla také, že $| a_i | \le b_i$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a platí : $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Veta 11.3 (Abelové kritérium)**:**

Ak $b_n \neq 0$, pre $n \in \mathrm{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný a postupnosť $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Veta 11.4 :

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a nech c je číslo. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ je konvergentný a platí : $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Veta 11.5 :

Ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady a nech c je číslo, tak aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí : $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Veta 11.6 :

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také konvergentné rady, že platí $a_n \leq b_n$, $n \in$ N.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak navyše $a_n \leq b_n$, pre niektoré $n \in$ N, tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Veta 11.7 :

Nech l je nezáporné celé číslo, nech a_n sú ľubovoľné čísla. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď rad $\sum_{n=l+1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Keď tieto rady sú konvergentné, potom platí : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{l} a_n + \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n$

Veta 11.8 :

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Nech $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ je taká postupnosť celých nezáporných čísel, že $q_0 = 0$

$q_n - 1 < q_n$, pre všetky $n \in$ N.

Nech $b_n = \sum_{i=q_{n-1}+1}^{q_n} a_i$, pre každé n = 1, 2, 3, ... , potom rad $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ je konvergentný a platí $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Veta 11.9 :

Nech p, q sú celé čísla, nech a_n sú ľubovoľné čísla. Potom rad $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď rad $\sum_{n=q}^{\infty} a_{n+p-q}$ je konvergentný. Keď tieto rady sú konvergentné, potom platí : $\sum_{i=q}^{\infty} a_{i+p-q} = \sum_{i=p}^{\infty} a_i$

Priklad 6 : Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentný