10. Racionálne a iracionálne čísla a ich vlastnosti

Definícia 10.1 :

Racionálne čísla Q je množina čísel $\left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathrm{Z} \text{ a } b \in \mathrm{N} \right\}$

Veta 10.1 :

Súčet, rozdiel a súčin racionálnych čísel je vždy racionálne číslo. Podiel racionálnych čísel s nenulovým deliteľom je racionálne číslo.

Definícia 10.2 :

Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne sú iracionálne.

Priklad 2 : Číslo e aj $\sqrt{2}$ sú iracionálne čísla

Veta 10.2 :

Pre ľubovoľné čísla a, b s vlastnosťou $a < b$ existuje také racionálne číslo r, že $a < r < b$ a tiež iracionálne číslo s, že $a < s < b$.

Veta 10.3 :

Nech $y > 1$, $n \in$ N. Potom existuje $c \in (0, 1) : (1+c)^n < y$

Veta 10.4 :

Ku každému $x \geq 0$ existuje $a \geq 0$, $a^n = x$, kde $n \in$ N.

Veta 10.5 :

Nech n je nepárne prirodzené číslo. Potom ku každému číslu x existuje práve jedno číslo a, pre ktoré platí $a^n = x$.

Nech n je párne celé číslo a $x < 0$, tak pre žiadne číslo a neplatí $a^n = x$.

Definícia 10.3 :

Nech n je nepárne prirodzené číslo a x ľubovoľné číslo. Číslo a jednoznačne určené vlastnosťou $a^n = x$ sa nazýva n-tá odmocnina čísla x a označuje sa $\sqrt[n]{x}$.

Nech n je párne prirodzené číslo a x nezáporné číslo. Jediné číslo a, ktoré má vlastnosť $a^n = x$ sa nazýva n-tá odmocnina čísla x a označuje sa $\sqrt[n]{x}$.

Vlastnosti odmocnín :

Nech n je prirodzené číslo, potom platí :

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, pre $a \geq 0$, $b \geq 0$
- $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$, pre $a > 0$, $b \geq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $m \in \mathrm{Z}$, $a \geq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, pre $a \geq 0$, $m \in \mathrm{N}$
- $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{q} a_i} = \prod_{i=1}^{q} \sqrt[n]{a_i}$, pre $q \in \mathrm{N}$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., q$

Definícia 10.4 :

Nech $a > 0$. Nech r je racionálne číslo $r = \frac{m}{n}$, $n \in$ N, $m \in$ Z potom definujeme

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

Veta 10.6 :

Nech $r \in$ Q a nech $a > 0$, $b > 0$ potom $(ab)^r = a^r b^r$ a $\left(\frac{b}{a}\right)^r = \frac{b^r}{a^r}$

Veta 10.7 :

Nech $a > 0$ a nech $r, s \in$ Q, potom $(a)^{r+s} = a^r a^s$, $a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$ a $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$

Veta 10.8 :

Nech r je racionálne číslo

Ak $0 < r$ a zároveň $0 < a < b$, tak $0 < a^r < b^r$

Ak $r < 0$ a zároveň $0 < a < b$, tak $0 < b^r < a^r$

Veta 10.9 :

Nech r, s sú racionálne čísla, pričom $r < s$

Ak $1 < a$, tak $a^r < a^s$

Ak $0 < a < 1$, tak $a^s < a^r$