

Séria č.8

Funkcia.

1) Množina všetkých takých čísel x , že

a) $(x - 1)(x + 2) < 0$;

b) $(x - 3)(x + 2) > 0$;

c) $(x + 1)(x + 3) \geq 0$;

d) $(x - 5)(x + 1) \leq 0$;

je interval alebo zjednotenie intervalov. Nájdite ich a načrtnite jednotlivé množiny na reálnej priamke.

2) Vyjadrite množinu všetkých čísel x , ktoré spĺňajú podmienku

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 7) > 0$;

b) $(x + 3)(x - 2)(x - 5) \leq 0$;

c) $\frac{x}{x-1} - 2 > 0$;

d) $\frac{5-x^2}{x+2} + x > 1$;

e) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} > \frac{1}{(x-1)(x-3)}$;

f) $x - 3 + \frac{1}{x-1} > \frac{x}{x-1}$

v tvare zjednotenia intervalov a nakreslite ju na číselnej priamke.

3) Nájdite množinu všetkých takých čísel x , že $(x + 2)(x - 3) > 0$ a zároveň $3x + 1 - x^2 \leq (4 - x)(4 + x)$ a znázornite ju na obraze číselnej priamky.

4) Vyjadrite v tvare zjednotenia intervalov množinu všetkých čísel x , pre ktoré platí $x^2 - 4 \geq 0$, $(x - 3)(x + 5) \leq 0$ a $x^2 - 12 < (x + 2)^2$.

Znázornite na priamke

5) Nech $A = (-\infty, \infty)$. Každému $x \in A$ priraďme číslo

a) $x + 1$;

b) x^2

c) $\frac{1}{1+x^2}$

Podrobne si premyslite, že v každom prípade dostávame funkciu.

6) Nech $A = (-\infty, \infty)$. Každému číslu $x \in A$ priraďme také číslo y , že $x^2 - y + 1 = 0$. Je tým definovaná funkcia na množine A ?

7) Možno na $(-\infty, \infty)$ definovať funkciu tak, že priraďíme každému číslu $x \in (-\infty, \infty)$ číslo y spĺňajúce podmienku $y = x(1 + \sqrt{y^2})$? Možno definovať funkciu na intervale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tak,

že každému $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ priraďíme také y , že platí $y = x(1 + \sqrt{y^2})$.

8) Je na $(-\infty, \infty)$ definovaná funkcia, ak povieme, že každému $x \in (-\infty, \infty)$ priraďíme také y , že $x^2 - y^2 = 0$? Prečo?

9) Urobte diskusiu o príklade 3. Možno hovoriť o funkcii, ktorá udáva závislosť kurzu od

času v prípade, že jedna alebo obe meny si samy hľadajú svoju úroveň na trhu podľa ponuky a dopytu? Možno hovoriť o funkcii, ak hodnotu oboch mien z času na čas určuje vláda alebo centrálna banka?

10) Opíšte funkcie, ktoré vyjadrujú

- a) mzdy všetkých zamestnancov jednej továrne (v danom čase);
- b) mliečnu produkciu kráv niektorého stáda v daný deň;
- c) ťažbu ropy zo všetkých austrálskych vrtov počas januára 1977.

11) Mnohé fyzikálne zákony vyjadrujú závislosť jednej veličiny od inej v tvare funkcie.

Pokiaľ poznáte príslušné fyzikálne zákony, opíšte funkcie, ktoré vyjadrujú závislosť

- a) elektrického odporu daného vodiča od teploty;
- b) vzdialenosti, ktorú prejde hmotný objekt vo vákuu v gravitačnom poli, od času, ktorý uplynul od jeho pustenja;
- c) sily potrebnej na natiahnutie danej pružiny od dĺžky, na ktorú treba pružinu natiahnuť.

12) Navrhňte ďalšie podobné úlohy. Uvažujme funkciu definovanú na $(-\infty, \infty)$ predpisom,

ktorý každému číslu $x \in (-\infty, \infty)$ priradí x , a funkciu definovanú na $(-\infty, \infty)$ tak, že

každému číslu $x \in (-\infty, \infty)$ priradíme číslo $\sqrt{x^2}$. Rovnajú sa tieto funkcie jedna druhej?

Prečo nie?

13) Aký by bol prirodzený definičný obor funkcie navrhnuť v príklade 11? Definujte ju presnejšie.

14) Nech $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Tým je definovaná funkcia f na intervale $\langle -1, 1 \rangle$. Čo je $f(0)$? Čo je $f(1)$? Čo je $f(2)$? Čo je $f(1/2)$?

15) Nech f je funkcia $x \rightarrow x^2 + x + 1$, $x \in \langle 0, \infty \rangle$. Čo je $f(0)$? Čo je $f(3/2)$? Čo je $f(-1)$? Ak teraz g označuje funkciu $x \rightarrow x^2 + x + 1$, $x \in (-\infty, \infty)$, čo je $g(-1)$? Platí rovnosť $f = g$? Je pravda, že $g(x) = f(x)$ pre každé $x \geq 0$?

16) Nech f je funkcia definovaná požiadavkami, aby pre $x < 1$ platilo $f(x) = 1 - x$, a aby bolo $f(x) = 2x$, ak $1 \leq x$. Nájdite množinu všetkých takých čísel x , že $2x - 1 + 3f(x) < 21$.

17) Nech f je funkcia z cvičenia 3. Rozhodnite, či platí tento výrok: Ak $x \in \langle -1, 1 \rangle$, tak $f(x) \in \langle 0, 3 \rangle$. Rozhodnite, či z nerovností $-2 < x < 3$ vyplýva, že $-1 < f(x) < 6$.

18) Patrí dvojica $(3, 7)$ do množiny $\{(x, y): 4x - y^2 \leq 15\}$? Patrí do nej dvojica $(7, 3)$?

19) Leží bod, ktorého dvojicou súradníc je $(5, 3)$, v kruhu, ktorý je grafom množiny $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4^2\}$? Leží v tomto kruhu bod $P = (-1, 3)$?

20) Predpokladajme, že v rovine je daná sústava súradníc a vzhľadom na ňu je $A = (1, -3)$, $B = (2, 1)$. Nájdite bod C na polpriamke vychádzajúcej z bodu A a prechádzajúcej cez bod

B, ktorého vzdialenosť od bodu A je dvojnásobkom vzdialenosti bodu B od A.