Séria č.6

Niektoré postupy na riešenie úloh, doplnenie na štvorec, kvadratický odhad, funkcie.

1) Dokážte, že ak a > 0, b > 0, a + b = 1, tak

   a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$;

   b) $\left(1+\frac{1}{a}\right)^2+\left(1+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{7}$.

   Určte, pre ktoré čísla a, b nastáva rovnosť.

2) Dokážte, že $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ pre všetky a, b, c.

3) Nech $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Dokážte, že

   a) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc$;

   b) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

4) Dokážte, že pre všetky a, b, c, x, y, z platí $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$. Porovnajte to s príkladom 11. (Návod: $(bx - ay)^2 + (az - cz)^2 + (cy - bz)^2 \geq 0$.)

5) Dokážte, že ak $a < b < c < d$, tak $(a + b + c + d)^2 \geq 8(ac + bd)$.

6) Nájdite také číslo x, aby číslo

   a) $x^2 - 6x + 10$; b) $3x^2 + 6x + 8$;

   c) $2x^2 - 28x + 93$ d) $6x^2 - 8x + 3$

   bolo najmenšie.

7) Nájdite také číslo x, aby číslo

   a) $-x^2 + 6x - 8$; b) $2 - 4x - 3x^2$;

   c) $-4x^2 + 40x - 97$; d) $-147x^2 - 42x + 46$

   bolo najväčšie.

8) Predpokladajme, že výrobca je schopný predať x výrobkov týždenne, ak jednotková cena je $p = 360 - 2x / 100$ centov. Ak výrobné náklady na x výrobkov sú $80x + 30\,000$ centov, pri akom počte výrobkov za týždeň dosiahne maximálny zisk?

9) Zistilo sa, že na určitom type pôdy pri hustote výsadby 60 jabloní na hektár sa na každej jabloni urodí (priemerne) 400 jabĺk; pri väčšej hustote výsadby sa však tento počet jabĺk znižuje o 10 za každý strom na 1 ha, ktorý je navyše. Pri akom počte stromov na hektári sa dosiahne najväčšia celková úroda jabĺk?

10) Na ropnom nálezisku je v prevádzke, 40 vrtov, každý s priemernou výdatnosťou 150

barelov ropy denne. Odhaduje sa, že keď sa navŕta nový vrt, priemerná výťažnosť na 1 vrt klesne o 3 barely denne. Pri akom počte vrtov bude celková ťažba maximálna?

11) Na sídlisku je 150 bytov. Keď je mesačné nájomné za 1 byt 150 dolárov mesačne, sú všetky byty prenajaté. Zistilo sa, že za každých 5 dolárov, o ktoré sa zvýši mesačné nájomné, zvýši sa počet neobsadených bytov o jeden. Ak každý obsadený byt vyžaduje 15 dolárov mesačne na údržbu a opravy, aké nájomné by sa malo predpísať, aby zisk bol maximálny?

12) Experiment sa vykonal trikrát, pričom sa získali výsledky a, b, c ako hodnoty (tej istej) meranej veličiny. Za najlepší odhad meranej veličiny sa považuje číslo x také, že súčet $(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$ je minimálny. Nájdite toto x.

13) Predmet vyhodený zvislo nahor začiatočnou rýchlosťou v (danou v o metroch za sekundu) je po uplynutí času t (v sekundách) vo výške $vt - 1/2gt^2$ metrov nad zemou, pričom $0 \leq t \leq$ T, kde T je čas potrebný na dopadnutie predmetu späť na zem a g je gravitačné zrýchlenie v mieste experimentu (v metroch za sekundu na druhú). Vypočítajte maximálnu výšku, ktorú vyhodený predmet dosiahne. Určite T.

14) Aká má byť začiatočná rýchlosť kameňa vyhodeného zvislo nahor zo zeme, aby dosiahol bod obratu (najvyššiu výšku) pred oknom, ktoré je dva metre vysoké a spodný okraj má vo výške 10 metrov nad zemou? (Túto úlohu riešte až po úspešnom zvládnutí cvičenia 8. Nie je v ňom nič kvadratického.)

15) Výdavky obchodného domu s nákupom a distribúciou x hrachových konzerv denne sú $15 + \frac{3x}{100} + \frac{25x^2}{100000}$ dolárov. Keď predpokladáme, že priemerne sa denne predá $400(23 - p)$ konzerv, ak cena jednej je p centov, koľko konzerv by sa malo nakúpiť a za akú cenu by sa mali predávať?

16) Určite najmenšie také číslo h, že pre všetky x platí $-19 + 12x - 2x^2 \leq h$.

17) Určite najväčšie číslo k také, že $k \leq x^2 - 4x + 12$ pre všetky x.

18) Formulácia úloh v cvičeniach 1 a 2 nebola celkom fair. Čo by ste povedali na takúto úlohu: Určite najmenšie číslo m také, že pre všetky x platí pre všetky $-19 + 12x + 2x^2 \leq m$?

19) Nájdite najväčšie také číslo m, že

$$m \leq 2 + \frac{12}{x} + \frac{25}{x^2} \qquad (3.10)$$

pre všetky $x < 0$.

20) Najväčším takým číslom m, že (3.10) platí pre všetky $x > 0$, je 2, ale nedá sa to ukázať

pomocou doplnenia na štvorec. Predsa to dokážte. (Návod: Pravá strana nerovnosti (3.10) je zrejme väčšia ako 2 pre každé $x > 0$. Na druhej strane, ak $m > 2$, tak existuje $x > 0$ také, že pravá strana nerovnosti (3.10) je menšia ako m; napríklad $x = 1 + \frac{m-2}{37}$)