Mocniny s racionálnym exponentom

1) Strata energie na jednom kilometri elektrického vedenia je $I^2\, r + \dfrac{k}{r}$, kde I je prúd, r je odpor jedného kilometra vedenia a k je kladná konštanta. Ako treba voliť odpor r pri danom prúde a danej konštante k, aby sa strata energie minimalizovala? (Návod: Cvičenie 17.)

2) Pomocou vety 2.4 nájdite pravouholník maximálneho obsahu pri danom obvode. (Pozri cvičenie v stati II. 1.)

   Podobne spomedzi pravouholníkov daného obsahu nájdite ten, ktorý má minimálny obvod.

   Prečo nie sú tieto otázky formulované obrátene (t.j. nájsť pravouholník s minimálnym obsahom pri danom obvode)?

3) Dokážte, že ak $a > 0$, $b > 0$, tak

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$$

4) Ak $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$, tak

$$(a + b)(b + c)(c + a) \ge 8\, abc.$$

   Dokážte to. (Návod: Použite vetu 2.4. Všimnite si, že odmocniny sa nevyskytujú v samotnom tvrdení, až v dôkaze. Pravdaže, môžete vymyslieť aj inakší dôkaz: pozri cvičenie 19 (ii) v stati II.1.)

5) Dokážte, že ak $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $abcd = 1$, tak $a + b + c + d \ge 4$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a = b = c = d = 1$. (Návod: veta 2. 4.)

6) Dokážte, že ak a > 0, $b > 0$, c > 0, $d > 0$, tak

   (i) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} \ge 4$ (ii) $(a+b+c+d)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right) \ge 16$

6) Ak 3 je koreňom rovnice $2x^2 + (1 - a)x + 3 = 0$, čomu sa rovná a ? Nájdite druhý koreň (ak existuje).

7) Určte p, q, ak viete, že 2 a 3 sú korene rovnice $x^2 + px + q = 0$.

8) Urobte diskusiu o rovniciach (to znamená nájdite podmienky kladené na a, b, c, za ktorých neexistujú korene, koreň je jediný resp. existuje viac koreňov, a nájdite korene):

   (i) $(x - a)(2x + a) = 0$ (ii) $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$;

   (iii) $(2x - a)(x + 2a) = 0$; (iv) $x^2 + ax + a^2 = 0$;

   (v) $3x^2 - 8ax + 3a^2 = 0$; (vi) $x^2 - 2ax = c^2 - a^2$;

(vii) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=1$.

9) Nájdite také číslo, že jeho trojnásobok pripočítaný k jeho štvorcu dáva 28. Nájdite všetky také čísla.

10) Jedno číslo je o 13 väčšie ako druhé. Súčet štvorcov oboch čísel je 57. Nájdite tie čísla.

11) n–uholník má $\frac{1}{2}n(n-3)$ uhlopriečok. Koľko strán má mnohouholník, ktorý má 135 uhlopriečok ?

12) Za predpokladu, že poznáte Pytagorovu vetu a k nej obrátené tvrdenie, dokážte, že k ľubovoľným kladným číslam u, v existuje pravouhlý trojuholník, ktorého jedna odvesna je o u kratšia ako prepona a druhá odvesna je o v kratšia ako prepona. Vypočítajte dĺžku prepony. Je pre dané u, v taký trojuholník jediný ?

13) Aké sú rozmery pravouholníka, ktorého obsah je a a obvod b ?

14) Ak u, v sú korene rovnice $x^2 + px + q = 0$, tak $p = -(u + v)$, $q = uv$. Obrátene, ak $p = -(u + v)$ a $q = uv$, tak u, v sú korene rovnice $x^2 + px + q = 0$. Dokážte to.

15) Cvičenie 9 naznačuje ďalší spôsob riešenia kvadratickej rovnice (čiže dôkazu viet 3.1, 3.2 a 3.3). Z rovnosti $u + v = -p$, $uv = q$ môžeme vypočítať $(u - v)^2 = p^2 - 4q$. Ak poznáme u + v aj $u - v$, ľahko určíme u, v. Doplňte všetky potrebné detaily.

16) Nech a, b sú čísla, $a \neq 0$, $b^2 > 4a^2$. Ak u, v sú korene rovnice $ax^2 + bx + a = 0$, tak $uv = 1$.

17) Nájdite všetky čísla x s vlastnosťou

(i) $3\sqrt{x} = x+2$	(ii) $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$
(iii) $\sqrt{x+7} + x + 1 = 0$	(iv) $\sqrt{x+7} = x+1$
(v) $\sqrt{x} + \sqrt{x-8} = 2$	(vi) $\sqrt{x} - \sqrt{x-8} = 2$
(vii) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-6} = 1$	(viii) $2\sqrt{x-6} - \sqrt{x+2} = 1$

18) Nech $a > 0$. Riešte rovnicu $\sqrt{a-\sqrt{ax}} = x$.

19) Ukážte, že ku každému číslu $y > 23$ existuje také číslo x, že

$$\frac{x^2+x-15}{x-5} = y$$

Ukážte, že ku každému číslu $y < 3$ existuje číslo x také, že platí uvedená rovnosť.

20) Dokážte, že ak $y \in \left\langle \frac{1}{2}, 23 \right\rangle$, tak pre žiadne číslo x neplatí $\dfrac{2x^2+3x+7}{x-2} = y$.