Mocniny s racionálnym exponentom

1) Nech $a \in (0, 1)$ je racionálne číslo. Potom a sa dá písať v tvare (9.2), pričom postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, je takmer periodická. (Návod: Nech $a = p/q$, kde p, q sú nesúdeliteľné a nech $q = 2^s 5^t r$ pre vhodné nezáporné celé čísla s, t a pre vhodné r nesúdeliteľné s číslom 10. Ak u je väčšie z čísel s, t, tak $10^u a$ je racionálne číslo s menovateľom nesúdeliteľným s 10.)
2) Ak postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ celých čísel $\in [0, 9]$ nie je takmer periodická, tak číslo (9.2) je iracionálne. (Návod: Cvičenia 2, 5 a 6.)
3) Dokážte, že existuje veľa iracionálnych čísel. (Návod: Cvičenie 2. tejto série)
4) Ukážte, že ak $d < 0$, tak neexistuje (reálne) číslo z s vlastnosťou $z^2 = d$.
5) Nech $d > 0$. Potom $z^2 = d$ práve vtedy, keď $z = \sqrt{d}$ alebo $z = -\sqrt{d}$.
6) Všimnite si, že rovnosť $\sqrt{d^2} = d$ neplatí pre každé číslo d. Pre ktoré čísla neplatí? Pre ktoré čísla platí rovnosť $\sqrt{d^2} = -d$?
7) Keby druhé odmocniny neboli definované jednoznačne, nemohli by sme písať $\sqrt{d} + \sqrt{d} = 2\sqrt{d}$. Keby totiž $\sqrt{9}$ znamenalo nielen 3, ale aj –3, tak $\sqrt{9} + \sqrt{9}$ by bolo 6, 0 aj –6.
8) Dokážte, že pre každé n = 0, 1, 2, ... je číslo $a_n = \left(2+\sqrt{5}\right)^n + \left(2-\sqrt{5}\right)^n$ prirodzené. (Návod: $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$ pre n = 2, 3, ...).
9) Nech $a_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ pre n = 0, 1, 2, ... Dokážte, že a_n je prirodzené číslo pre n = 0, 1, 2, ... (Návod: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, n = 2, 3, ...)
10) Ukážte, že číslo

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

je prirodzené pre každé n = O,1,2,... . (Návod: $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$, n = 2, 3, ...).
11) Z každej uvedenej dvojice čísel zistite, ktoré je väčšie:
(i) $2+\sqrt{8}$, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, (ii) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; (iii) $\sqrt{19}+\sqrt{21}$, $\sqrt{17}+\sqrt{23}$.
12) Ukážte, že $\sqrt{y-x}+\sqrt{y+x} < \sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}$ pre ľubovoľné čísla x, y, pre ktoré $1 < x < y$.
13) Dokážte, že pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.je $|x| < \sqrt{1+x^2}$.
14) Pre ktoré čísla y existuje také číslo x, že

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x} = y \;?$$

15) Dokážte, že ak $a \geq 0$, $b \geq 0$, tak $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.

16) Dokážte, že ak $a > 0$, tak $\frac{a}{2+a} < \sqrt{1+a} - 1 < \frac{1}{2}a$.

17) Dokážte, že $\sqrt{x}+\sqrt{y} < \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ pre každé $x \geq 0$, $y \geq 0$, pričom konštanta $\sqrt{2}$ je najlepšia (najmenšia) možná.

18) Nech $d > 0$. Nájdite také kladné čísla u, v, že $uv = d$, pričom súčet $u + v$ je najmenší možný. (Návod: Veta 2.4.)

19) Dokážte, že harmonický priemer kladných čísel (cvičenie 8 v stati II. 1) nikdy neprevýši ich geometrický priemer, a že tie priemery sa zhodujú iba vtedy, keď sa dané čísla rovnajú.

20) Dokážte, že ak $a > 0$, $b > 0$, tak $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, pre každé $x > 0$. Rovnosť platí len keď $x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.