Konvergencia radov.

1) Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo m, že pre každé prirodzené číslo $n \geq m$ platí $n^{-2} < \varepsilon$.

2) Vypočítajte $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$$

(Návod: Pri výpočte tejto sumy treba samozrejme tiež dokázať, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n(n+2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná. Keď vypočítame niekoľko čiastočných súčtov a použijeme indukciu alebo vzorec $\frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2(i+2)}$, i = 1, 2, ..., odvodíme, že s_n = $\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$, n = 2, 3, ... Z toho na základe Archimedovej vlastnosti vyplýva, že hľadaná suma sa rovná 3/4.)

3) Vypočítajte

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+6)}$

4) Vypočítajte

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

5) Vypočítajte

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

6) Vypočítajte

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!\,2!}$

(Návod: (i) $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; (ii) $s_n = 1 - \frac{1}{n!\,2^n}$, n = 1, 2, ...)

7) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie je sumovateľná. (Návod: Ukážte, že n-tý čiastočný súčet je väčší ako n/2 pre n = 1, 2, ... a potom použite Archimedovu vlastnosť ako v

príklade 1, v príklade 6 alebo ešte lepšie ako vo vete 7.3.)

8) Dokážte, že postupnosť

(i) $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ (ii) $\{(3n-5)3^{n-2}\}_{n=0}^{\infty}$

nie je sumovateľná.

9) Ukážte, že postupnosť

$$\left\{\left(\frac{120(n+1)}{121^n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je sumovateľná. (Návod: 120(n + l) 121n < 241/242 pre každé n > 240. Keď sa vám nechce počítať, ukážte pomocou Archimedovej vlastnosti alebo cvičenia 1, že exituje také prirodzené číslo m, že 120(n + l)/121n ≤ 241/242 pre každé prirodzené $n \geq m$.)

10) Nech $0 < \rho < 1$. Dokážte, že postupnosť

$$\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rho^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je sumovateľná.

Mocniny s racionálnym exponentom

1) Ak r je racionálne číslo a s iracionálne číslo, tak $r + s$, $r - s$, rs , r/s sú iracionálne čísla.
2) Číslo x je racionálne práve vtedy, keď číslo $x - [x]$ je racionálne.
3) Z cvičenia 2 vyplýva, že každé racionálne číslo a sa dá napísať v tvare $a = n + b$, kde n je celé číslo a b je také racionálne číslo, že $0 \leq b < 1$. Podobne každé iracionálne číslo a možno vyjadriť v tvare $a = n + b$, kde n je celé číslo a b je iracionálne číslo s vlastnosťou $0 \leq b < 1$.
4) Ak $0 < x < b - a$, tak existuje celé číslo m s vlastnosťou $a < mx < b$. Dokážte to. (Návod: Napodobnite dôkaz vety 8.2.)
5) Čísla, ktoré majú dekadické zápisy opísané v stati VII.8 sú racionálne.
6) Pre n = 1, 2, ... nech d_n, e_n sú také čísla, že $0 < d_n \leq 9$, $0 \leq e_n \leq 9$. Nech m je také prirodzené číslo, že $d_n = e_n$ pre n = 1, 2, ..., m – l, a zároveň $d_m < e_m$. Potom buď $e_m = d_m + 1$ a pre každé n = m+l, m+2, ... je $d_n = 9$, $e_n = 0$, alebo

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i}{10^i} < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{10^i}$$

7) Zistite všetky prípady, v ktorých číslo nemá jednoznačný desatinný rozvoj.

8) Postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa volá periodická, ak existuje také prirodzené číslo k, že $d_n = d_{r_n}$, kde r_n je prirodzené číslo s vlastnosťami $1 \leq r_n \leq k$, $n = q_k k + r_n$, pričom q je vhodné nezáporné celé číslo, pre všetky n = 1, 2, ... Dokážte, že ak postupnosť nezáporných celých čísel $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická, tak číslo (9.2) je racionálne. Dá sa písať v tvare p/q, kde čísla p, q sú nesúdeliteľné a číslo q je nesúdeliteľné s číslom 10.

9) Postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, sa volá ***takmer periodická***, ak existuje nezáporné celé číslo l také, že $\{d_{n+l}\}_{n=1}^{\infty}$ je periodická. Ak $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ je skoro periodická postupnosť čísel $\in$ [0, 9], tak číslo (9.2) je racionálne; dá sa písať v tvare p/q, kde p, q sú nesúdeliteľné celé čísla a q je deliteľné číslom 2^l alebo 5^l, ale nie vyššou mocninou 2 resp. 5.

10) Nech $a = p/q$ je racionálne číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s nesúdelitelnými p, q, pričom q je nesúdeliteľné s 10. Potom a sa dá zapísať v tvare (9.2) s periodickou postupnosťou $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. (Návod: Je možné nájsť prirodzené u, v čísla u, v také, že $u < v$ a čísla 10^u, 10^v dávajú ten istý zvyšok po delení číslom q. Potom $10^v - 10^u = 10^u(10^{v-u} - 1)$ je deliteľné číslom q. Teda $a = \dfrac{r}{10^k - 1}$, kde r je celé číslo a $k = v - u$. Navyše

$$\frac{r}{10^k - 1} = \frac{r}{10^k} + \frac{r}{10^{2k}} + \dots \,.$$