Čiastočné súčty.

1) Predpokladajme označenie z vety 3.2. Dokážte, že ku každému celému číslo $m \geq p$ existuje prirodzené číslo n tak, že $q_n \geq m$.

2) Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre každé celé $n \geq p$ a nech postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ sú sumovateľné. Potom aj postupnosť $\{a_n - b_n\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná a platí

$$\sum_{i=p}^{\infty}(a_i - b_i) = \sum_{i=p}^{\infty} a_i - \sum_{i=p}^{\infty} b_i$$

3) Vypočítajte

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)\left(\frac{3}{4}\right)^n$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2n3^{n+1} + 5\,4^{n-1}}{5^{n+2}}$

4) Vypočítajte

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(1+x^i)^2}{(1+x^2)^{2i}}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{ix + x^i}{(1+x)^i}$

pre každé $x > 0$.

5) Nech $a_0 = 5$ a nech

$$a_m = \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4}a_{m-1}$$

pre každé m = 1,2,... (je to rekurencia (5.3)). Vypočítajte súčet postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

(Návod: Pre každé n = 0, 1, 2, ... platí $|a_n| \leq 5\left(\frac{7}{12}\right)^n$.)

6) Nech $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ a nech pre n = 2, 3, ... je $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + b_{n-2}$. Nech $a_n = \frac{b_n}{2^n}$ pre n = 0, 1, 2, ... Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej sumu. (Návod: $b_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ pre n = 0, 1, 2, ...)

7) Ak b_n, n = 0, 1, 2, ... sú čísla definované v cvičení 6 tejto série, vypočítajte súčet postupnosti $\{b_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ pre každé $x \in \langle 0, \frac{4}{7})$.

8) Nech $b_0 = b_1 = 1$ a $b_m = b_{m-1} + b_{m-2}$ pre každé celé $m \geq 2$. (Pozri príklad 3 zo state VI. 2.) Dokážte, že pre každé $x \in \langle 0, \frac{1}{2})$. je postupnosť $\{b_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ sumovateľná a vypočítajte jej súčet. (Návod: Indukciou dokážte, že pre každé n = 0, 1, 2, ... je $0 \leq b_n \leq 2^n$.)

9) Nech b_n , n = 0,1,2,... sú čísla z cvičenia 6. Vypočítajte súčet postupnosti $\left\{\frac{nb_n}{3^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$

(Návod: $\frac{nb_n}{3^n} \le n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, pretože $b_n \le 2^n$ pre n = 0, 1, 2, ... Indukciou alebo pomocou. Bernoulliho nerovnosti ako vo vete 5.3 dostanete $n\left(\frac{2}{3}\right)^n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...)

10) Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť z príkladu 7. Dokážte, že $0 \le a_n \le 3\left(\frac{8}{9}\right)^n$ pre všetky n = 0, 1, 2, ... Platí $0 \le a_n \le 3\left(\frac{7}{8}\right)^n$ pre všetky n = 0, 1, 2, ... ? Platí $0 \le a_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ pre všetky n = 0, 1, 2, ... ? Platí $0 \le a_n \le 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ pre všetky n = 0, 1, 2, ... ?

11) Pomocou viet state 3 možno ukázať, že niektorá postupnosť nie je sumovateľná. Dokážte pomocou nich, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie je sumovateľná. (Návod: Predpokladajme opak, totiž že je sumovateľná, a označme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=s$$

Potom podľa vety 3.2 platí

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots=s$$

a z vety 3.4 dostaneme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{2}s$$

Podľa cvičenia 3 zo state 3 (môžete pravda dokazovať aj priamo) odvodíme

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots=\frac{1}{2}s$$

Z vety 3.6 však vyplýva, že to nie je možné.)

12) Pre 0 ≤ ρ < 1 dokážte, že postupnosť $\{n^2\rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a potom vypočítajte jej súčet. (Návod: Namiesto Bernoulliho nerovnosti použite nerovnosť z príkladu 6 state VI.3. Prípadne uvážte $r \in (\rho, 1)$. Potom $n\rho^n \le ar^n$, n = 0, 1, 2, ..., kde $a=\frac{\rho}{r-\rho}$ ako vo

vete 5.3. Teda $n^2\rho^n \le anr^n$ pre n = 0, 1, 2, ... Teraz vezmite $q \in (r,1)$. Potom $nr^n \le bq^n$, n = 0, 1, 2, ..., kde $b = \frac{r}{q-r}$. Teda $n^2\rho^n \le abq^n$ pre n = 0, 1, 2, ...)

13) Nájdite celé $m \ge 0$ tak, aby číslo (6.5) proximovalo e s chybou menšou než 10^{-10}.

14) Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{(2n)!}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná.

15) Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{(n!)^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná.

16) Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná.

17) Dokážte, že postupnosť $\left\{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2\right\}_{n=0}^{\infty}$ nie je sumovateľná.

18) Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{n^n}{(2n)!}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná.

19) Dokážte, že ak $0 \le r < 1$, tak postupnosť $\left\{\frac{r^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná.

20) Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také prirodzené číslo m, že pre každé prirodzené číslo $n \ge m$ platí $1/n < \varepsilon$. Dokážte to. (Návod: Veta 7.2.)