

Súčty a súčiny.

- 1) Celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné 8 práve vtedy, keď $\delta_0(a) + \delta_1(a)10 + \delta_2(a)100$ je deliteľné 8.
- 2) Vyslovte a dokážte kritérium deliteľnosti šestnástimi.
- 3) Sformulujte a dokážte kritérium deliteľnosti číslom 2^m pre $m = 1, 2, \dots$
- 4) Dokážte, že nezáporné celé číslo a je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď číslo

$$(8.2) \quad \sum_{j=0}^{v(a)-1} \delta_j(a)$$

je deliteľné deviatimi. (Návod: Zvyšok po delení čísla 10^j deviatimi je 1 pre každé $j = 1, 2, \dots$)

- 5) Dokážte, že celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné tromi práve vtedy, keď číslo (8.2) je deliteľné tromi. (Návod: Pre každé $j = 1, 2, \dots$ zvyšok podelenia čísla 10^j tromi je 1.)
- 6) Vyslovte a dokážte kritérium deliteľnosti číslom 25.
- 7) Sformulujte a dokážte kritérium deliteľnosti číslom 125.
- 8) Vyslovte a dokážte kritérium deliteľnosti číslom 12.
- 9) Ak $a = (1,02)^5$, nájdite $\delta_{-1}(a), \delta_{-2}(a), \delta_{-3}(a), \delta_{-4}(a), \delta_{-5}(a)$.

(Návod: Na výraz $(1+x)^5$, kde $x = \frac{2}{10^2}$ aplikujte binomickú vetu.)

- 10) Nájdite $\delta_j(a)$ pre všetky $j \geq 0$ a $\delta_{-1}(a), \delta_{-2}(a), \delta_{-3}(a), \delta_{-4}(a), \delta_{-5}(a)$. ak (i) $a = (1,04)^6$; (ii) $a = (0,98)^4$; (iii) $a = (2,006)^5$.
- 11) Ak k je prirodzené číslo, tak násobenie číslom 10^k sa vykoná posunutím desatinnej čiarky o k miest doprava. Ak ju nemáme kam posunúť, zápis násobeného čísla sa doplní nulami. Sformulujte presnejšie a dokážte.
- 12) Delenie číslom k pre k prirodzené sa vykoná posunutím desatinnej čiarky o k miest doľava.
- 13) Násobenie a delenie čísel, s ktorými sa zaoberáme v tejto stati, sa zvyčajne prevádza na násobenie a delenie prirodzených čísel a posúvanie desatinnej čiarky. Tak sa to robí v základnej škole. Sformulujte to podrobnejšie a presnejšie.
- 14) Zovšeobecnite pravidlá sčítovania a násobenia prirodzených čísel vyjadrených dekadickým zápisom, opísané v stati 1.7, na čísla, ktoré majú troj-, štvor-, ...ciferné zápisy.
- 15) Nech $0 < r < 1$. Terajší výnos plodiny je oproti želanému výnosu o r -násobok želaného výnosu menší. O aký násobok terajšieho výnosu treba zväčšiť terajší výnos, aby sme dosiahli želanú úroveň?
- 16) Ak z určitej výšky pustíme loptu, vyskočí späť, ale už len do r -násobku výšky, z ktorej

bola vypustená, pričom $0 < r < 1$. Akú celkovú dráhu prejde lopta pri takomto poskakovaní, kým sa nezastaví, ak ju vypustíte z výšky h ? Uvedomte si, že rýchlosť lopty sa značne mení. Preto metóda z príkladu 2 je nepoužiteľná. Namiesto toho vynásobte obe strany (1.4) číslom h .

17) Nech $0 < r < 24/25$. Aké množstvo zmesi alkoholu s vodou koncentrácie 24 objemových jednotiek alkoholu v 25 objemových jednotkách zmesi treba pridať k jednému litru čistej vody, aby vznikla zmes koncentrácie r objemových jednotiek alkoholu v jednej objemovej jednotke zmesi?

18) „Výpočet“ v príklade 8 sa zakladá na výsledku príkladu 2. Analogicky pomocou príkladu 3 odvoďte

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \frac{5}{4^5} + \dots = \frac{4}{9} .$$

19) Pomocou výsledku príkladu 8 a podobného triku aký použil d’Oresme ukážte, že

$$\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{4}{8} + \dots + n^2 \frac{1}{2^n} + \dots = 6 .$$

Čiastočné súčty.

1) Ak $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných čísel a s_n , $n = p, p + 1, p + 2, \dots$ sú definované vzťahom (2.1), tak $s_m \leq s_k$ pre ľubovoľné celé čísla m, k s vlastnosťou $p \leq m \leq k$.