Súčty a súčiny.

1) Dokážte, že ak x je kladné celé číslo, tak $(1+x)^n - 1$ je deliteľné číslom x pre každé n = 1, 2,....
2) Dokážte, že ak x je kladné celé číslo, tak $(x-1)^n + (-1)^{n-1}$ je deliteľné číslom x pre každé n = 1,2,....
3) Dokážte, že ak m, n sú nezáporné celé čísla, tak

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m-k}{m-k} = 0$$

   Návod: Aplikujte binomickú vetu na druhý činiteľ výrazu $\binom{n}{m}(1+x)^m$ a (5.5), potom položte x = -1.)
4) Dokážte Bernoulliho nerovnosť (príklad 5 v stati VI.3) pomocou binomickej vety.
5) Pomocou binomickej vety dokážte nerovnosť z príkladu 6 v stati VI. 3.
6) Navrhnite a dokážte nerovnosť, ktorá by nasledovala v postupnosti: cvičenie 4, cvičenie 5,.... tejto série.
7) Podrobne dokážte (indukciou) prvú gramatickú vetu z dôkazu vety 7.2.
8) Vyjadrite každé celé číslo a s vlastnosťou $0 \le a \le 31$ v tvare

$$a = \sum_{j=0}^{4} d_j 2^j ,$$

   kde d_j = 0 alebo 1 pre každé j = 0,1,2,3,4. Tým určíte δ_j (a), j = 0,1,2,...pre každé také číslo a, pričom p = 2.
9) Vyjadrite každé celé číslo a vlastnosťou $0 \le a \le 81$ v tvare

$$a = \sum_{j=0}^{3} d_j 3^j ,$$

   kde d_j = 0, 1 alebo 2 pre každé j = 0,1,2,3.
10) Určte δ_j (135) pre j = 0, 1, 2, 3, . . . , ak p = 3.
11) Ľubovoľná hmotnosť, ktorá je celočíselným násobkom, ale najviac 31-násobkom danej hmotnostnej jednotky (gram, kilogram, unca) sa dá jediným spôsobom odvážiť pomocou sady závaží 1, 2, 4, 8 a 16 jednotiek tak, že vážený predmet sa položí na jednu misku váh a (niektoré) závažia na druhú.
12) Ľubovoľná hmotnosť, ktorá je celočíselným násobkom danej hmotnostnej jednotky sa dá

jediným spôsobom odvážiť pomocou sady závaží 1, 2, 4, 8,...jednotiek tak, že vážený predmet .sa položí na jednu misku váh a (niektoré) závažia na druhú.

13) Pomocou sady závaží 1,3 a 9 sa dá jediným spôsobom odvážiť ľubovoľná hmotnosť, nie väčšia ako 13, ktorá je celočíselným násobkom danej jednotky.
14) Pomocou sady závaží 1, 3, 9, 27 a 81 sa dá jediným spôsobom odvážiť ľubovoľná hmotnosť, nie väčšia ako 121, ktorá je celočíselným násobkom danej jednotky.
15) Pomocou sady závaží 1, 3, 9, 27, 81, . sa dá odvážiť ľubovoľná hmotnosť, ktorá je celočíselným násobkom danej jednotky, ak závažia možno klásť na obidve misky váh, a dá sa to urobiť len jedným spôsobom.
16) Dokážte, že nezáporné celé číslo a je deliteľné desiatimi práve vtedy, keď $\delta_0(a) = 0$.
17) Celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné číslom 10^m vtedy a len vtedy, keď $\delta_j(a) = 0$ pre $j = 0,1,\dots,m-1$.
18) Dokážte, že celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné piatimi práve vtedy, keď $\delta_0(a) = 0$ alebo 5.
19) Dokážte, že celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné dvomi vtedy a len vtedy, keď $\delta_0(a)$ je deliteľné dvomi.
20) Celé číslo $a \geq 0$ je deliteľné štyrmi vtedy a len vtedy, keď $\delta_0(a) + \delta_1(a)10$ je deliteľné štyrmi.