Súčty a súčiny.

1) Dokážte, že ak p je celé číslo, m nezáporné celé číslo a pre každé $i = p, p+1, \ldots, p+m$ platí $0 \leq a_i \leq b_i$, tak

$$\prod_{i=p}^{p+m} a_i \leq \prod_{i=p}^{p+m} b_i \ .$$

Kedy platí ostrá nerovnosť? (Návod: Postupujte indukciou. Nenapodobňujte dôkaz vety 4.2.)

2) Dokážte, že $\prod_{i=0}^{n}\left(1-\frac{x^{2^j}}{2}\right) \geq 1-x+\frac{x}{2^{n+1}}$, pre každé $x \in \langle 0,1\rangle$ a každé n=0, 1, 2, ...

3) Dokážte, že pre každé n = 1,2,. a pre $x_j > 0$, kde j = 1, 2, ..., n, platí

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j\right) > 1+\sum_{j=1}^{n} x_j$$

4) Dokážte, že

$$\frac{m}{x}+x^m \geq m+1$$

pre každé $x > 0$ a každé m = 0, 1, 2, ... (Návod: $mx^{-1} + x^m - (m+1) = x^{-1}(x^{m+1} - (m+1)x + m)$; potom použite cvičenie 12 state 2, pričom $n = m + 1$, $a + x$, b = l.)

5) Ukážte, že ak m, n sú nezáporné celé čísla, tak

$$\binom{n}{m} = \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(n-j)}{m!}$$

6) Dokážte, že

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

a určte, pre ktoré n, k má ten vzorec zmysel.

7) Nájdite n, pre ktoré $\binom{n}{3} = 8\binom{n}{2}$.

8) Overte rovnosť

$$\binom{23}{0}+\binom{23}{1}+\binom{23}{2}+\binom{23}{3} = 2^{11}$$

a pomocou nej nájdite prvočinitele čísla $2^{11} - 1$.

9) Dokážte, že $\binom{2^n}{m}$ je párne pre každé m =1, 2, ..., $2^n - 1$ a každé n = 1, 2, 3, ... Nájdite také párne k, že pre niektoré m = 1, 2, ... , k – 1 číslo $\binom{k}{m}$ nie je párne.

10) Ukážte, že ak p je prvočíslo, tak p delí $\binom{p}{m}$, m = l,2,..,p-l .

11) Dokážte, že ak $m < n$, $0 < k \le$ m, tak $\binom{m}{k} < \binom{n}{k}$.

12) Ukážte, že

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

pre každé n = 0,1,2,.... (Návod: (5.6).z kapitoly VII.5)

13) Dokáže že

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{(j!)^2((n-j)!)^2} = \binom{2n}{n}^2$$

pre n = 0,1,2,.... (Návod: Cvičenie 12 tejto série.)

14) Dokážte, že platí pre ľubovoľné celé čísla $n \ge 1$, $m \ge 0$. (Návod: Pri indukcii vzhľadom na m využite, že $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$ a (5.3).)

15) Dokážte, že

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{i+n-1}{n-1} = \binom{n+m}{n}$$

pre ľubovoľné celé $n \ge 1$, $m \ge 0$. (Návod: Indukciou vzhľadom na m, využite pritom $\binom{n-1}{n-n} = \binom{n}{n}$ a vzorec (5.3).),

16) Odvoďte výsledok cvičenia 15 z cvičenia 14 tejto série.

17) Udajte výslovne, pre ktoré celé čísla k, m, n platia vzorce (5.4) a(5.5) z kapitoly VII.5.

18) Dokážte, že

$$\binom{k}{m}\binom{m}{n}\binom{n}{p} = \binom{k}{p}\binom{k-p}{n-p}\binom{k-n}{m-n}$$

pre ľubovoľné také k, m, n, p, že všetky uvedené binomické koeficienty sú definované. Výslovne udajte, pre ktoré.

15) Dokážte, že

$$\binom{k}{m}\binom{m}{n}\binom{n}{p}\binom{p}{r} = \binom{k}{r}\binom{k-r}{p-r}\binom{k-p}{n-p}\binom{k-n}{m-n}$$

pre ľubovoľné také celé čísla k, m, n, p, r, že všetky napísané binomické koeficienty sú definované.

16) Všimnite si, ako medzi sebou súvisia (5.5) z kapitoly VII.5, cvičenie 18, cvičenie 19 tejto série,... .Urobte nasledujúci krok.

17) Nech $k \geq 1$, $j \geq 1$ sú celé čísla. Nech r_i, $i = 1,2,...,j$ sú také celé čísla, že $r_i \leq r_{i+1} \leq k$ pre všetky $i = 1,2,...,j - 1$ a nech $r_{j+1} = 0$.

Potom
$$\binom{k}{r_1}\prod_{i=1}^{j-1}\binom{r_1}{r_{i+1}} = \prod_{i=0}^{j-1}\binom{k - r_{j+1-i}}{r_{j-1} - r_{j+1-i}}.$$

18) Napíšte (6.2) pre $n = 6,7,8,9,10$. Rozšírte z toho dôvodu Pascalov trojuholník a vyčítajte z neho potrebné koeficienty.

19) Ukážte, že
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n \ , \qquad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$$
pre každé $n = 1,2,3,$. Čo sa stane, keď $n = 0$?

20) Ukážte, že pre $n = 0,1,2,...$platí
$$\sum_{i=0}^{n}2^i\binom{n}{i} = 3^n \ , \qquad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i 2^i\binom{n}{i} = (-1)^n \ .$$