

Ešte o funkciách

1) Nájdite inverznú funkciu k funkcii

(i) $\sqrt[3]{x} \frac{2x-1}{x+3}$;

(ii) $\frac{x-2}{x-3} \sqrt[3]{2x+1}$.

2) Dokážte, že funkcia $x \mapsto x^2$ je klesajúca na množine $(-\infty, 0)$.

3) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je funkcia $x \mapsto x^{2n}$ klesajúca na množine $(-\infty, 0)$.

4) Funkcia $x \mapsto [x]$ je neklesajúca na $(-\infty, \infty)$. Nie je rastúca na $(-\infty, \infty)$. Je rastúca na množine \mathbb{Z} .

5) Funkcie $x \mapsto x + |x|$ a $x \mapsto x - |x|$ sú monotónne na množine $(-\infty, \infty)$. Nie sú však rýdzo monotónne.

6) Funkcia $x \mapsto \frac{1}{x}$ je klesajúca na $(-\infty, 0)$. Je tiež klesajúca na $(0, \infty)$. Nie je však klesajúca na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

7) Nájdite monotónnu funkciu, ktorá nie je prostá. Existujú rýdzo monotónne funkcie, ktoré nie sú prosté?

8) Nájdite funkciu prostú na nejakej množine, ktorá na nej nie je monotónna.

9) Lineárne funkcie sú monotónne. Ktoré z nich sú rýdzo monotónne? Ktoré sú rastúce?

10) Afinné funkcie sú monotónne. Ktoré z nich sú rýdzo monotónne? Ktoré sú rastúce? Ktoré sú klesajúce?

11) Ak funkcie f, g sú rastúce, tak zložená funkcia $g \circ f$ je rastúca.

12) Cvičenie 10 platí aj pre klesajúce funkcie. Čo sa stane, keď f je rastúca a g klesajúca alebo keď f je klesajúca a g rastúca?

13) Ako vyzerá graf párnej funkcie? Graf nepárnej funkcie?

14) Ak funkcia f je párna na množine A a množina A nie je jednoprvková, tak neexistuje inverzná funkcia k funkcii f uvažovanej na množine A .

15) Ak funkcia f je nepárna na množine A a existuje inverzná funkcia k funkcii f uvažovanej na A , tak aj táto inverzná funkcia je nepárna.

16) Existujú párne lineárne funkcie? Existujú nepárne lineárne funkcie? Existujú lineárne funkcie, ktoré sú párne aj nepárne zároveň? Existujú lineárne funkcie, ktoré nie sú ani párne ani nepárne?

17) O danej funkcii f na danej množine A rozhodnite, či je párna, nepárna, párna aj nepárna, alebo ani párna ani nepárna:

(i) $f(x) = x + |x|, A = (-\infty, \infty)$

(ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, A = \langle -1, 1 \rangle$

(iii) $f(x) = x^2 + 3|x|, A = (-\infty, \infty)$

(iv) $f(x) = 1 + \sqrt{x}, A = \langle 0, \infty \rangle$

(v) $f(x) = \frac{1}{x}, A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(vi) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, A = (-\infty, \infty)$

(vii) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, A = (-\infty, \infty)$

(viii) $f(x) = \frac{x^3}{1+|x|}, A = (-\infty, \infty)$

18) Dokážte, že ak f je párna funkcia a g ľubovoľná zložená funkcia $g \circ f$ je párna.

19) Ak párna funkcia je rastúca na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom $0 \leq a < b$, tak je klesajúca na intervale $\langle -b, -a \rangle$.

20) Ak nepárna funkcia je rastúca na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom $0 \leq a < b$, je monotónna na intervale $\langle -b, -a \rangle$? Ak áno, o aký typ monotónnosti ide?