

Kritéria konverencie

- 1) Pre ktoré čísla x je postupnosť $\left\{ \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ sumovateľná?
- 2) Pre ktoré čísla x je postupnosť $\left\{ \frac{x^n}{(1+x^n)^2} \right\}_{n=0}^{\infty}$ sumovateľná?
- 3) Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná, tak to isté platí aj o postupnosti $\left\{ \sqrt{|a_n a_{n+1}|} \right\}_{n=p}^{\infty}$
(Návod: $\sqrt{|a_n a_{n+1}|} \leq \frac{|a_n| + |a_{n+1}|}{2}$.)
- 4) Dokážte, že postupnosť $\{n^3 x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná pre každé $x \in (-1, 1)$. Potom vypočítajte jej súčet. (Návod: Cvičenia 2, 3 state 3.)
- 5) Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná, tak to isté platí aj o postupnosti $\{a_n^2\}_{n=p}^{\infty}$. (Návod: Cvičenie 6 state 3 a cvičenie 3 state 4.)
- 6) Ak postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ sú sumovateľné, tak aj postupnosť $\{a_n b_n\}_{n=p}^{\infty}$. (Návod: $|a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$)
- 7) Ak postupnosť $\{a_n^2\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná, tak aj $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná postupnosť.
(Návod: $\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$.)
- 8) Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná, tak to isté platí aj postupnosti $\left\{ \frac{a_n}{1+|a_n|} \right\}_{n=p}^{\infty}$

Ešte o funkciách

- 1) Nech definičným oborom funkcie f je množina všetkých čísel $x \neq 4$ a nech $f(x) = \frac{x|x-1|}{x-4}$ pre každé $x \neq 4$; nech definičný obor funkcie g tvoria všetky čísla, pričom $g(x) = 2x + 3$ pre každé x . Určte funkcie $f \circ g$ a $g \circ f$.
- 2) Ak hodnotami funkcie f sú čísla a $g(t) = t$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$, čo je $g \circ f$? Ak oborom definície funkcie g je nejaká množina čísel a $f(x) = x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, čo je $f \circ g$?

- 3) Nech $g(x) = 1$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a nech f je funkcia, ktorej hodnotami sú čísla. Čo je $g \circ f$?
- 4) Určte $\mathcal{X}_{[0,1]}\mathcal{X}_{[5,6]}$; $\mathcal{X}_{[-1,-\frac{1}{2}]}\mathcal{X}_{[12,13]}$; $\mathcal{X}_{[0,1]}\mathcal{X}_{[0,1]}$; $\mathcal{X}_{[5,6]}\mathcal{X}_{[5,6]}$.
- 5) Dokážte, že k, l, m sú lineárne funkcie, tak aj zložená funkcia $l \circ m$ je lineárna. Ak $l(x) = \lambda x$, $m(x) = \mu x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, pričom λ, μ sú čísla, nájdite vzorec pre $l \circ m$.
- 6) Zložená funkcia z afinných funkcií je afinná.
- 7) Nech f je funkcia $x \mapsto x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$, nech g je funkcia $x \mapsto [x]$, $x \in (-\infty, \infty)$ a nech h je funkcia $x \mapsto |x|$, $x \in (-\infty, \infty)$. Určte $f \circ (h \circ g)$, $h \circ (f \circ g)$, $(h \circ f) \circ g$.
- 8) Je funkcia $x \mapsto |x|$, $x \in (-\infty, \infty)$, prostá? Je prostá na intervale $\langle 0, \infty \rangle$? Je prostá na množine $(-\infty, 0)$?
- 9) Je funkcia $x \mapsto [x]$, $x \in (-\infty, \infty)$ prostá? Je prostá na množine \mathbb{Z} všetkých celých čísel ?
- 10) Dokážte, že ak n je párne prirodzené číslo, tak funkcia $x \mapsto x^n$, $x \in (-\infty, \infty)$, nie je prostá, ale je prostá na intervale $(-\infty, 0)$ aj na intervale $\langle 0, \infty \rangle$.
- 11) Funkcia $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, je prostá.
- 12) Ak n je nepárne prirodzené číslo, tak funkcia $x \mapsto x^n$, $x \neq 0$, je prostá.