Supréma a infima množiny

1) Ktoré funkcie f definované na $\langle 0,\ 1\rangle$ majú tú vlastnosť, že existuje $w > 0$ a existuje $x \in \langle 0,\ 1\rangle$ tak, že $|f(x)| \le w$?
2) Ak funkcia je ohraničená (zdola resp. zhora ohraničená) na množine M aj na množine K, tak je ohraničená (zdola resp. zhora ohraničená) aj na $M \cup K$.

Kritéria konvergencie

1) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná.
2) Pre každé $k \ge 2$ je postupnosť $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sumovateľná. Dokážte to.
3) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\sqrt{n}}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie je sumovateľná.
4) Dokážte, že pre každé n = 1, 2, 3, ... platí

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

   Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná. Z toho odvoďte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná.
5) Dokážte, že ak postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ nezáporných čísel je sumovateľná a postupnosť $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ nezáporných čísel je ohraničená, tak postupnosť $\{a_n b_n\}_{n=p}^{\infty}$ je sumovateľná.
6) Dokážte, že postupnosť $\left\{n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej súčet. (Návod: Príklad 5 v stati VIII.5.)
7) Nech $|r| < 1$. Ukážte, že postupnosť $\{nr^n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej súčet.
8) Nech $|r| < 1$. Ukážte, že postupnosť $\{n^2 r^n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej sumu. (Návod: Cvičenie 10 v stati VIII.5.)

9) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej sumu. (Návod: Cvičenie 3 state VIII.7.)

10) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2(n+4)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej sumu.

11) Dokážte, že sumovateľné postupnosti sú ohraničené. Všimnite si, že v príklade 5 state VIII.7 je uvedená ohraničená postupnosť, ktorá nie je sumovateľná. Nájdite iný taký príklad.

12) Ukážte, že postupnosť je sumovateľná.

(i) $\left\{\frac{n}{(n+1)!}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (ii) $\left\{\frac{(-2)^n}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$

13) Ukážte, že postupnosť $\left\{\frac{(250\,n+320)^9}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+2\right)^{24}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná.

14) Dokážte, že ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak postupnosť $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná.

15) Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich postupností sú sumovateľné.

(i) $\left\{\frac{n\sqrt{n}}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (ii) $\left\{\frac{n+1}{(n+2)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(iii) $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (iv) $\left\{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2\right\}_{n=1}^{\infty}$

(v) $\left\{\sqrt{\frac{1}{n^2+n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (vi) $\left\{\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}\right\}_{n=0}^{\infty}$

(vii) $\left\{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (viii) $\left\{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$

(ix) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (x) $\left\{\frac{1}{3+10^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$

(xi) $\left\{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (xii) $\left\{\frac{n^n}{(n!)^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$

16) Nech $0<|u|<|v|<1$, $a_{2k}=u^k$, $a_{2k+1}=v^k$, pre každé $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná a vypočítajte jej súčet.

17) Ako vieme, postupnosť $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná. Pokúste sa na ňu aplikovať príklad 7. Vieme, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie je sumovateľná. Pokúste sa na ňu aplikovať príklad 7. Podobná poznámka, akú sme urobili v príklade 6 o príklade 4, sa dá povedať aj o príklade 7.

18) Nech a_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$ sú čísla definované v príklade 2. Dokážte, že postupnosť $\{na_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je sumovateľná pre každé $x \in (-1/4, 1/4)$ a potom vypočítajte jej sumu. (Návod: Cvičenie 2 state 2 a príklad 2.)