Supréma a infima množiny

1) Ukážte, že $\inf\{\sqrt[n]{2} : n = 1, 2, \dots\} = 1$. (Návod: Použite Bernoulliho nerovnosť.)
2) Dokážte, že $\inf\{\sqrt[n]{a} : n = 1, 2, \dots\} = 1$ pre ľubovoľné $a \geq 1$.
3) Dokážte, že $\sup\{\sqrt[n]{\frac{1}{2}} : n = 1, 2, \dots\} = 1$.
4) Dokážte, že $\sup\{\sqrt[n]{a} : n = 1, 2, \dots\} = 1$ pre ľubovoľné $a \in (0, 1)$.
5) Prienik systému intervalov je interval.
6) Ak I, J sú také intervaly, že $I \cap J \neq \emptyset$, tak $I \cup J$ je interval.
7) Ak I, J, K sú intervaly, pričom $I \cap J \neq \emptyset$, $J \cap K \neq \emptyset$, tak $I \cup J \cup K$ je interval.
8) Ak I_j, $j = 1, 2, \dots, k$, sú také intervaly, že $I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k-1$, tak zjednotenie množín I_j, $j = 1, 2, \dots, k$, je interval.
9) Ak zjednotenie systému intervalov je interval I, tak ľavý koncový bod intervalu I je infimum množiny ľavých koncových bodov všetkých intervalov toho systému a pravý koncový bod intervalu I je supremum množiny všetkých pravých koncových bodov.
10) Podrobne dokážte, že $\{x^2 : 1 \leq x \leq 3\} = \langle 1, 9 \rangle$.
11) Podrobne dokážte, že $\{x^5 : -2 < x < 2\} = (-32, 32)$.
12) Podrobne dokážte, že $\{1 + x^4 : -3 < x < 3\} = \langle 1, 82)$.
13) Podrobne dokážte, že $\{x^{-2} : x < 0\} = \{x^{-2} : 0 < x\} = (0, \infty)$.
14) Podrobne dokážte, že $\{x^{-1} : 0 < x \leq 1\} = \langle 1, \infty)$.
15) Nech $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ pre všetky $x \neq 1/2$. Zistite, či funkcia f je na množine $\langle -1, 1/2)$ ohraničená, zdola ohraničená alebo zhora ohraničená. Podobne na množinách $(1/2, 15\rangle$, $(1, 15)$, $\langle 1, \infty)$.
16) Funkcia $x \mapsto x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$, je ohraničená na intervale $(-2, 3)$. Nadobúda na ňom minimálnu hodnotu (v ktorom bode?), ale nie maximum.
17) Postupnosť $\{n^{-2}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Dokážte to. Má maximálny člen (hodnotu)? Má minimálny člen?
18) Nech M je neprázdna množina. Existuje funkcia definovaná na množine M a taká, že pre každé číslo v je nerovnosť $f(x) \leq v$ splnená pre každé $x \in M$? Ako sa táto podmienka líši od ohraničenosti zhora funkcie f na množine M?

19) Nájdite takú funkciu definovanú na $\langle 0,\ 1\rangle$, že pre každé $w > 0$ je nerovnosť $|f(x)| \le w$ splnená pre každé $x \in \langle 0,\ 1\rangle$. Nájdite všetky také funkcie.

20) Nájdite takú funkciu definovanú na $\langle 0,\ 1\rangle$, že ku každému $w > 0$ existuje také $x \in \langle 0,\ 1\rangle$, že $|f(x)| \le w$.