

## Supréma a infima množiny

- 1) Zistite, či množina  $M = \{x: (1-x)(x-2) \geq 0\}$  je zdola ohraničená. Je ohraničená zhora ?  
Je ohraničená ?
- 2) Je množina  $M = \{x: (x-1)(x-2) \geq 0\}$  zhora ohraničená? Je zdola ohraničená? Je ohraničená?
- 3) Je množina  $M = \left\{x: \frac{x(x-1)}{5-x} + 1 > \frac{8}{5-x}\right\}$  zdola ohraničená? Je zhora ohraničená? Je ohraničená?
- 4) Ukážte, že množina  $M = \left\{x: \frac{3x+1}{(x^2+2)(x^2+12)} < \frac{x^2+x-13}{(x^2+1)(x^2-12)}\right\}$  je zhora ohraničená.  
Ukážte, že nie je zdola ohraničená. (Návod: Žiadne číslo väčšie ako povedzme 13 nepatrí do  $M$ . Každé číslo menšie ako  $-13$  patrí do  $M$ . Všimnite si, že by ste mali ťažkosti, keby ste chceli vyjadriť  $M$  ako zjednotenie intervalov.)
- 5) Dokážte, že každá podmnožina ohraničenej (zhora ohraničenej, zdola ohraničenej) množiny je ohraničená (resp. zhora ohraničená, zdola ohraničená).
- 6) Dokážte, že množina je ohraničená práve vtedy, keď je časťou ohraničeného intervalu.
- 7) Ak  $P, Q$  sú zdola (zhora) ohraničené množiny, tak rovnakú vlastnosť má  $P \cup Q$  aj  $P \cap Q$ .  
Dokážte to.
- 8) Podrobne dokážte, že interval  $(-1, -3)$  nemá maximálny prvok. Vyžaduje si to ukázať, že ku každému prvku intervalu  $(-1, -3)$  existuje väčší prvok.
- 9) Nech  $a$  je číslo,  $M = \langle a, a \rangle$ . Je množina  $M$  ohraničená? Má maximum? Má minimum? Čo je  $\sup M$ ? Čo je  $\inf M$ ?
- 10) Nech  $a, b$  sú také čísla, že  $a < b$ . Podrobne ukážte, že  $\sup \langle a, b \rangle = b$ . Všimnite si, že interval  $\langle a, b \rangle$  nemá maximálny prvok. Všimnite si, že minimálnym prvkom intervalu  $\langle a, b \rangle$  je  $a$ ; preto  $\inf \langle a, b \rangle = a$ .
- 11) Nech  $a < b$ . Ukážte, že  $\inf (a, b) = a$ .
- 12) Nech  $a$  je ľubovoľné číslo. Je množina  $(-\infty, a)$  zdola ohraničená? Je zhora ohraničená?  
Ukážte, že  $\sup (-\infty, a)$  je  $a$ . Čo je  $\inf (-\infty, a)$ ?
- 13) Nech  $a$  je ľubovoľné číslo. Je množina  $(a, \infty)$  zdola ohraničená? Je zhora ohraničená?  
Ukážte, že  $\inf (a, \infty) = a$ . Čomu sa rovná  $\sup (a, \infty)$ ?
- 14) Nech  $M = \langle -7, 2 \rangle \cup (3, 9)$ . Nájdite  $\inf M$  a  $\sup M$ . Má množina  $M$  maximum? Má minimum?

15) Ak  $L \subset M$ ,  $L \neq \emptyset$ , tak  $\inf M \leq \inf L \leq \sup L \leq \sup M$ .

16) Nech  $M = \left\{ \frac{n+1}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$ , čiže  $M$  pozostáva zo všetkých čísel, ktoré sa dajú vyjadriť

v tvare  $\frac{n+1}{n}$ , kde  $n$  je prirodzené číslo. Nájdite  $\inf M$  aj  $\sup M$ . Má množina  $M$

maximum? Má minimum?

17) Nech  $M = \left\{ \frac{n-1}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$ . Nájdite  $\inf M$ ,  $\sup M$ . Má množina  $M$  maximum? Má  $M$

minimum?

18) Nech  $M = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$ . Nájdite  $\inf M$ ,  $\sup M$ . Zistite, či  $M$  má maximum a

minimum.

19) Nech množina  $M$  pozostáva z čísel 0,5; 0,55; 0,555; 0,5555 a tak ďalej. To znamená, že

$M = \{ s_n : n = 1, 2, \dots \}$ , kde  $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{5}{10^i}$ , pre  $n = 1, 2, \dots$ . Dokážte, že  $\sup M = \frac{5}{9}$ .

20) Nech 
$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2n+1}, 1 - \frac{1}{2n} \right).$$

Načrtnite si množinu  $M$ . Dokážte, že  $\sup M = 1$ .