Mocniny s racionálnym exponentom

1) Dokážte, že pre každé $x > 0$ platí

   (i) $\sqrt[3]{1+x} > \sqrt[6]{1+x^2}$ (ii) $\sqrt[4]{1+x} > \sqrt[12]{1+x^3}$

2) Vypočítajte

$$\left(\sqrt[3]{\left(a^2+1\right)\sqrt{1+\tfrac{1}{a^2}}} + \sqrt[3]{\left(a^2-1\right)\sqrt{1-\tfrac{1}{a^2}}}\right)^{-2}$$

   pre ľubovoľné $a > 1$ aj $a < -1$.

3) Pre $a > 0$, $x > 0$, $a \neq x$ vypočítajte

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right)^{-2} \sqrt{1 + 2\sqrt{\tfrac{a}{x} + \tfrac{a}{x}}}$$

4) Dokážte, že číslo $\sqrt[3]{3}$ je iracionálne.

5) Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ je iracionálne.

6) Dokážte, že číslo $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ je iracionálne.

7) Dokážte, že ak m, n sú prirodzené čísla a číslo $\sqrt{m}$ je iracionálne, tak čísla $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ a $\sqrt{m} + \sqrt[3]{m}$ sú iracionálne.

8) Nájdite najväčšie spomedzi čísel $\sqrt[n]{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. (Návod: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$ pre každé $n \geq 4$.)

9) Dokážte, že $\left|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right| \leq \sqrt[n]{|a-b|}$ pre ľubovoľné čísla $a \geq 0$, $b \geq 0$.

10) Dokážte, že pre každé $n = 1,2,\ldots$ platí

$$\frac{1}{n+1} < \sqrt[n]{2} - 1.$$

11) Nech $a > 0$ a $n > 1$ je prirodzené číslo. Dokážte

$$\sqrt[n]{1+a} > \frac{1}{1 - \dfrac{a}{n(1+a)}} > 1 + \frac{a}{n(1+a)}$$

12) Aké sú rozmery kvádra objemu $V > 0$, ktorý má najmenší možný plošný obsah povrchu?

13) Nech $p > 0$. Je potrebné nájsť čísla $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a $w \geq 0$ tak, aby $xy + xz + yz + yw + zw + xw = p$ a aby ich súčin bol čo najväčší.

14) Sformulujte a riešte úlohu duálnu k úlohe z cvičenia 13 tejto série.

15) Nech $p > 0$. Je potrebné nájsť čísla $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a $w \geq 0$ tak, aby $xyz + xzw + yzw + xyw = p$ a aby ich súčin bol čo najväčší.

16) Sformulujte a riešte úlohu duálnu k úlohe z cvičenia 15 tejto série.

17) Rozmyslite si a komentujte úlohu nájsť obdĺžnik daného plošného obsahu $p > 0$, ktorý má najväčší obvod. Podobne s úlohou nájsť obdĺžnik daného obvodu $2s > 0$, ktorý má najmenší plošný obsah.

18) Nech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $s > 0$. Nájdite čísla x, y, a z také, aby $\alpha x + \beta y + \gamma z = s$, a aby ich súčin bol čo najväčší.

19) Nech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $s > 0$. Nájdite čísla x, y, a z také, aby $\alpha xy + \beta yz + \gamma zx = s$, a aby ich súčin bol čo najväčší.

20) Nech $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $s > 0$. Nájdite čísla x, y, a z také, aby ich súčin bol s, a aby $\alpha x + \beta y + \gamma z$ bolo čo najmenšie.