Mocniny s racionálnym exponentom

1) Pokračovanie cvičenia 8 v stati II.2. Pri danom čísle $h \geq 0$ určte, v ktorých okamihoch je predmet presne h metrov nad zemou. Určte, pre ktoré h má tento problém riešenie a kedy existuje jediné riešenie.
2) Ak $a_m = 2a_{m-2} - a_{m-1}$ pre $m = 2, 3, \ldots$ a zároveň
   (i) $a_0 = a_1 = 1$; (ii) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$,
   určte a_n pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$.
3) Ak $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_m = 3a_{m-1} - a_{m-2}$ pre $m = 2, 3, \ldots$, vypočítajte a_n pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$.
4) Nech $a_m = 2a_{m-1} - a_{m-2}$ pre $m = 2, 3, \ldots$ a zároveň
   (i) $a_0 = a_1 = 1$; (ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$; (iii) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.
   Určte a_n pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$.
5) Nájdite množinu všetkých čísel x (vyjadrite ju ako zjednotenie intervalov), pre ktoré platí
   (i) $4x^2 - 12x + 5 < 0$; (ii) $x^2 + 2x > 15$;
   (iii) $x^2 + 2x + 4 < 0$; (iv) $x^2 + 4x - 5 \leq 0$;
   (v) $9x^2 - 12x + 3 \geq 0$; (vi) $x^2 - 10x + 6 < 0$;
   (vii) $4x^2 - 4x + 2 > 0$; (viii) $x^2 - 6x + 11 \geq 0$.
6) Urobte podrobný dôkaz vety 5.2.
7) Nájdite množinu všetkých čísel x (v tvare zjednotenia intervalov), pre ktoré
   (i) $x - \frac{8}{x} < 7$ (ii) $(x-1)^2 > 1 - x$;
   (iii) $x + \frac{15}{x} \leq 8$; (iv) $x^2 - 13 \geq 3\left(\frac{5}{3} - x\right)$;
   (v) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-2} \geq 1$; (vi) $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-5} \leq 1$;
   (vii) $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-3} \geq 1$; (viii) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-3} \geq 1$;
   (ix) $\frac{1}{x^2 - x - 90} \geq 4$; (x) $\frac{2x^2 + 7x + 8}{x^2 + 6x + 10} \geq 1$;
   (xi) $\frac{2x^2 - x - 5}{x^2 - 2x - 3} > 1$; (xii) $\frac{1}{7} \leq \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4} \leq 7$;
8) Nájdite množinu všetkých čísel y, ku ktorým existuje také číslo x, že platí

$$\frac{2x^2 + 3x + 7}{x - 2} = y$$

9) Nájdite najlepšie odhady (minimum, maximum) výrazu

$$\frac{2x-1}{x^2+6x+14}$$

10) Obvod pravouhlého trojuholníka je *2s*. Čo viete povedať o jeho prepone?

11) Nech $a > 0$, $b > 0$. Nájdite najväčšie zo všetkých takých čísel u, pre ktoré platí $u \le \frac{a}{x} + bx$ pre každé $x > 0$;

nájdite najmenšie z čísel v, ktoré spĺňajú $\frac{a}{x} + bx \le v$, pre každé $x < 0$.

Ak u je už najväčšie také číslo a v najmenšie číslo požadovanej vlastnosti, pre ktoré x nastane rovnosti?

12) Tlačený text má zaberať s štvorcových centimetrov na strane knihy. Horný a dolný okraj musí byť a cm, ľavý a dolný okraj b cm. Ak naším cieľom je len ušetriť papier, aké sú najvhodnejšie rozmery strany? (Návod: Cvičenie 7.)

13) Nech $a > 0$, $b > 0$ a nech c je ľubovoľné číslo. Nájdite najväčšie z čísel u, ktoré spĺňajú nerovnosť $u \le \frac{a}{x-c} + bx$, pre každé $x > c$, a tiež najmenšie také číslo v, ktoré spĺňa $\frac{a}{x-c} + bx \le v$ pre všetky $x < c$.

14) Rafinéria produkuje $\frac{25-10x}{3-x}$ tisíc litrov benzínu super popri x tisícoch litrov benzínu špeciál. Ak zisk z 11 benzínu super je 9/5 zisku z 11 špeciálu, pri akej produkcii benzínu špeciál bude celkový zisk maximálny?

15) Nech a, b, c sú také čísla, že $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$. Nájdite najväčšie zo všetkých tých čísel u, pre ktoré platí $u \le \frac{x}{ax^2+bx+c}$, pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, a tiež najmenšie z čísel v, ktoré spĺňajú $\frac{x}{ax^2+bx+c} \le v$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$.

16) Nájdite všetky čísla k, ku ktorým existujú čísla x, y tak, že platia podmienky $3x + 4y = k$ a $x^2 + y^2 + 4x = 21$.

17) Nájdite všetky čísla k, ku ktorým existujú čísla x, y, spĺňajúce podmienky $y = kx$ a $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$.

18) Ak n je párne prirodzené číslo a $d > 0$, tak číslo z nie je vlastnosťou $z^n = d$ jednoznačne určené. Nájdite všetky také čísla.

19) Ak n je nepárne prirodzené číslo, tak $\left|\sqrt[n]{d}\right| = \sqrt[n]{|d|}$ pre každé d.

20) Ktoré z čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ je najmenšie a ktoré je najväčšie?