Súčty a súčiny.

1) Dokážte, že

$$\sum_{i=p}^{p+m}(a_{i+2}-a_i)=a_{p+m+2}+a_{p+m+1}-a_{p+1}-a_p$$

pre ľubovoľné celé p a celé $m \geq 2$ a pre ľubovoľné čísla a_j, $j = p, p+1, \ldots, p+m+2$.

2) Pre n = 1, 2, ... vypočítajte

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)}$, (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i^2(i+2)^2}$

3) Cvičenie 1 tejto série ide o krok ďalej než príklad 5 z kapitoly VII.2. Urobte ďalší krok.

4) S využitím výsledku príkladu 7 z kapitoly VII.2 vypočítajte $\sum_{i=1}^{n} i^3$ pre $n = 1,2,\ldots$.

5) Pre $n = 1,2,\ldots$ ukážte, že $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

6) Vypočítajte $\sum_{i=1}^{n} i^4$. pre n = 1, 2, ...

7) Dokážte, že každé prirodzené číslo s vlastnosťou, že 2^n-1 je prvočíslo, je samo prvočíslom. (Návod: Ak n nie je prvočíslo, tak sa dá rozložiť na súčin $n = pq$ a podľa (2.2) z kapitoly VII.2 sa na súčin dá rozložiť aj $2^n - 1 = (2^p)^q - 1$.)

8) Dokážte, že $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i a^{2k-1} b^i$

pre ľubovoľné čísla a, b, a všetky k = 0, 1, 2, ...

9) Dokážte, že $a^n - nab^{n-1} + (n-1)b^n = (a-b)^2 \sum_{j=1}^{n-1} j a^{n-1-j} b^{j-1}$

pre ľubovoľné čísla a, b a pre n = 1,2,.,

10) Nech $a_0 = a_1 = 1$, nech pre každé celé číslo $m \geq 2$ je $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$ (pozri príklad 3 v stati VI. 2.). Ukážte, že pre každé n = 1,2,... platí

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_{n+1} - 1 \quad .$$

11) Pri tom istom označení ako v cvičení 12 dokážte, že

$$\sum_{i=0}^{n} a_{2i+1} = a_{2n-1} \quad , \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i} = a_{2n-1}$$

pre n = 1, 2,....

12) Pri označení z cvičenia 12 ukážte, že

$$\sum_{i=0}^{2n-1} a_i a_{i+1} = a_{2n}{}^2 - 1 \quad , \quad \sum_{i=0}^{2n} a_i a_{i+1} = a_{2n+1}{}^2$$

pre n = 1, 2,....

13) Vypočítajte

$$\prod_{j=0}^{n} (2j+1)$$

pre každé n = 0, 1, 2,....

14) Ukážte, že

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad , \quad \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

pre každé n = 1,2,... (Návod: Príklad 3 a cvičenie 1.)

15) Vypočítajte

$$\prod_{j=1}^{n} (3j-1) \quad , \quad \prod_{j=0}^{n} (3j+1)$$

pre každé n = 1,2,... (Návod: najskôr určte $\prod_{j=1}^{n} (3j-1)3j(3j+1)$

pre n = 1, 2,... .)

16) Ukážte, že pre každé $x \neq 1$, n = 0,1,2,... platí

$$\prod_{j=0}^{n} \left(1 + x^{2^j}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

17) Dokážte, že ak $a \neq 0$ pre každé $i = p, p + 1, \ldots, p + n$, tak

$$\prod_{i=p}^{p+m} \frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{a_{p+m+1} a_{p+m+2}}{a_p a_{p+1}}$$

18) Vypočítajte

(i) $$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j+2}{j}\right)^2$$ (ii) $$\prod_{j=1}^{n} \frac{j(j+2)}{j+1}$$

pre každé n = 1,2,....

19) Dokážte, že ak $a_i \neq 0$ pre každé $i = p, p + 1, \ldots, p + n$, tak

$$\prod_{i=p}^{p+m} \frac{a_{i+3}}{a_i} = \frac{a_{p+m+1} a_{p+m+2} a_{p+m+3}}{a_p a_{p+1} a_{p+2}} \quad .$$

20) Zovšeobecnite príklad 2 z kapitoly VII.3, cvičenie 16 a cvičenie 18 tejto série.