

Séria č.2

Logika, výrokový počet, dôkazy, množiny a operácie s nimi.

1. Profesor Merle White z katedry matematiky, profesor Leslie Black z filozofie a Jean Brown, mladá stenografka z rektorátu, spolu obedujú.
"Nie je to zvláštne" všimla si dáma, "že naše priezviská sú Black, Brown a White, a že jeden z nás má čierne (black) vlasy, jeden hnedé (brown) vlasy a jeden biele (white)?"
"Naozaj" odpovedala osoba s čiernymi vlasmi, "a všimli ste si, že u jedného z nás súhlasí farba vlasov s priezviskom?"
"Fakt, máte pravdu!" zvolal profesor White. ,
Ak dáma nemá hnedé vlasy, akú farbu vlasov má profesor Black?
2. Obyvatelia istého vzdialeného ostrova sa delia na dve dedičné kasty. Cudzincovi sa príslušníci oboch kást javia presne rovnakí. Ale členovia kasty Arbu vždy hovoria pravdu a príslušníci kasty Bosnin vravia vždy opak pravdy. Na tento ostrov prišiel cestovateľ, ktorý trocha poznal ich zvyky, ale slabo ovládal ich jazyk. Po pristátí stretol troch domorodcov - Abl, Bsl a Crl.
"Z ktorej kasty si?" spýtal sa cestovateľ domorodca Abl.
"Bhsz cjnt dkp v flgqw mrx" povedal Abl.
"Čo vraví?" spýtal sa cestovateľ domorodcov Bsl a Crl, ktorí obaja sa trocha učili po anglicky.
"On hovorí on Arbu" povedal Bsl.
"On hovorí on Bosnin" povedal Crl.
Do ktorých kást patria Bsl a Crl ?
3. Keď našli psychiatra mŕtveho v jeho byte, vypočúvali štyroch jeho pacientov. Polícia od svedkov vedela, že každý z tých štyroch pacientov bol so psychiatrom v jeho byte v deň jeho smrti práve raz. Pred výsluchom sa tí štyria pacienti stretli a dohodli, že polícii povedia samé lži. Každý z pacientov urobil dve vyhlásenia:
 - 3.i.1. Nikto z nás štyroch nezabil psychiatra.
Keď som odchádzal, psychiater ešte žil.
 - 3.i.2. Ja som prišiel ako druhý.
Keď som prišiel, psychiater bol mŕtvy.
 - 3.i.3. Prišiel som ako tretí.
Keď som prišiel, psychiater žil.
 - 3.i.4. Vrah neprišiel po mne.
Keď som prišiel, psychiater bol už mŕtvy.Ktorý zo štyroch pacientov zabil psychiatra?
4. V tomto probléme účinkujú: Alex White, ktorý je lekár, a jeho dve sestry Bell, tiež lekárka, a Cecily, právnička. Ďalej Felicity Black, právnička, a jej dvaja bratia Dean, lekár, a Eugene, právnik.
Jednej noci, keď dvaja z nich boli v bare, dvaja na pláži a dvaja v kine, jeden z tých, čo boli na pláži, zabil druhého. Overila sa pravdivosť týchto výrokov:
 - (i) V bare bol(a) lekár(ka) a právnik (právnička).
 - (ii) Tí, čo boli v kine, majú rovnaké povolanie.
 - (iii) Obeť a vrah boli dvojčatá.
 - (iv) Obeť bola manželom (manželkou) jednej z dvoch osôb v bare.
 - (v) Vrah bol manželom (manželkou) druhej z osôb v bare.
 - (vi) Obeť a jej manžel(ka) mali rôzne povolania.
 - (vii) Jedna z dvoch osôb v kine bola bývalým manželským partnerom jednej z dvoch osôb v

bare.

(viii) Druhá z osôb v kine a lekár(ka) v bare sú rovnakého pohlavia.
Kto je vrah?

Reálne čísla, axiómy, ohraničenosť (maximá a minimá), princíp suprema a infima.

- 1) Ak $a = b, b = c, c = d$, tak $a = d$. Dokážte to.
- 2) Ak $a = b, b \neq c$, tak $a \neq c$. Dokážte.
- 3) Čo sa stane, ak v príklade 4 platí $b = 0, a \neq 0$? Čo sa stane v prípade, že $a = 0$ a $b \neq 0$? Čo sa stane, ak $a = 0$ aj $b = 0$?
- 4) Nech a, b, c sú dané čísla. Nájdite všetky také čísla x , že $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$.
- 5) Nech $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$. Nájdite číslo x s vlastnosťou, že

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Uvedomte si, že touto vlastnosťou je číslo x skutočne jednoznačne určené.

- 6) Nech $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, ab + ac + bc \neq 0$. Nájdite číslo x , pre ktoré

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

- 7) Nech a, b sú dané čísla. Nájdite všetky také čísla x , že

$$\frac{x+a}{b-x} = 1 - \frac{x}{x-b}$$

Čo sa stane, keď $a = 0$?

- 8) Nech a, b sú čísla. Nájdite všetky také čísla x , že

$$x + \frac{1}{x-b} = \frac{ax - ab + 1}{x-b}$$

Čo sa stane, keď $a = b$?

- 9) Nech a, b sú čísla, pričom $b \neq 0$. Nájdite všetky také čísla x , že

$$\frac{1}{b} + \frac{a}{x(x-a)} = \frac{1}{x-a}$$

- 10) Nech a je dané číslo. Nájdite všetky čísla x , pre ktoré

$$x(x-a) - x + 1 = x - a.$$

- 11) Ak a, b, c sú kladné čísla, tak aj čísla $a + b + c, abc$ sú kladné.
- 12) Ak a, b, c sú kladné čísla, tak aj číslo $ab + ac + bc$ je kladné.
- 13) Dokážte, že $1 + 1 \neq 0$. Dokážte, že $1 \neq 1 + 1$.
- 14) Dokážte, že ak $a \neq -1$, tak

$$a = \frac{1 + \frac{a-1}{a+1}}{1 - \frac{a-1}{a+1}}$$

- 15) Pri danej jednotke odporu je odpor rezistora kladné číslo. Ak sú dva rezistory s odpormi R, S zapojené paralelne, pre výsledný odpor X platí podmienka

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{R} + \frac{1}{S}$$

Vypočítajte ho. Aký odpor bude mať rezistor, ktorý vznikne, keď k tým dvom rezistorom paralelne pripojíme ešte tretí rezistor s odporom P ?

- 16) Pri danej jednotke kapacity je kapacita kondenzátora kladné číslo. Ak sú kondenzátory s kapacitami C a D zapojené do série, kapacita X takto vytvoreného kondenzátora vyhovuje podmienke

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{C} + \frac{1}{D}$$

Vypočítajte ju. Akú kapacitu bude mať sústava, ktorá vznikne sériovým pripojením ďalšieho kondenzátora s kapacitou E k predošlým dvom ?