Séria č.15

Rekurzívne definície.

1) Ak $a < 0$, tak $a^n > 0$ pre všetky párne n, zatiaľ čo $a^n < 0$ pre všetky nepárne celé čísla n.
2) Ak a je celé číslo, pre ktoré celé čísla n je číslo a^n celé?
3) Ak $0 < a < b$ a n je celé číslo, aká nerovnosť platí medzi číslami a^n, b^n ?
4) Porovnajte čísla a^n, b^n (zistite, ktoré z nich je väčšie) pre ľubovoľné $a \neq 0$, $b \neq 0$ a ľubovoľné celé n.
5) Vypočítajte

   (i) $\sum_{i=1}^{5}(2i+1)$; (ii) $\prod_{i=1}^{5}(2i+1)$; (iii) $\sum_{i=1}^{5} i^2$;

   (iv) $\prod_{i=1}^{5} i^2$; (v) $\sum_{i=5}^{9}(2i+3)$; (vi) $\prod_{i=5}^{9}\frac{1}{i^2}$

6) Vypočítajte

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

   pre $n = 1,2,3,4,5$. Navrhnite a dokážte vzorec platný pre každé kladné celé číslo n.

7) Ukážte, že pre každé $n = 0,1,2,...$ platí

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \quad .$$

8) Dokážte, že ak $a \neq 1$, tak

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$$

   pre každé $n = 0,1,2,....$. Všimnite si, že v cvičení 3 je špeciálny prípad tohto výsledku. Čo sa stane, keď $a = 1$?

9) Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad ,$$

   pre každé nezáporné celé číslo n.

10) Dokážte, že pre každé $n = 2,4,6, ...$ platí

$$\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad .$$

11) Dokážte vzorce z príkladu 7.

12) Vypočítajte

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+3}$$

pre n = 1,2,3,4,5. Navrhnite a dokážte vzorec, ktorý platí pre každé n = 1,2,... .

13) Dokážte, že

$$\prod_{i=1}^{n} (2j-1) \le n^n$$

pre každé n = 1,2,... .

Súčty a súčiny.

1) Dokážte tvrdenie vety 1.1 o súčinoch.
2) Dokážte tvrdenie vety 1.2 o súčinoch.
3) Sformulujte a dokážte analógiu formuly (1.9) pre súčiny.
4) Pre ľubovoľné celé čísla $p \ge 1$ a $m \ge 0$ vypočítajte
5) Pre n = 1,2,... vypočítajte

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \ .$$

(Návod: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.)

6) Pre n = 1,2,. vypočítajte

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$$

(Návod: $\frac{(2i+1)}{i^2(i+1)^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}$.)

7) Pre n = 1,2,. vypočítajte

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \ .$$