Séria č.14

Rekurzívne definície.

1) Navrhnite a dokážte vzorec pre n-tý člen a_n (n = 1,2, ...) postupnosti definovanej induktívne požiadavkami

   a) $a_1 = 1$; $a_{k+1} = \dfrac{1}{2-a_k}$, $k = 1, 2, \ldots$

   b) $a_1 = 0$; $a_{k+1} = \dfrac{1}{2-a_k}$, $k = 1, 2, \ldots$

   c) $a_1 = \dfrac{1}{2}$; $a_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

   d) $a_1 = 1$; $a_{k+1} = a_k + 2k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$

   e) $a_1 = 2$; $a_{k+1} = a_k(2k + 1)(2k + 2)$, $k = 1, 2, \ldots$

   f) $a_1 = \dfrac{1}{2}$; $a_{k+1} = a_k \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

2) Nech $a_1 = 1$, $b_1 = 1$; $a_{k+1} = a_k + b_k$, $b_{k+1} = a_k + 3b_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Nájdite a_5, b_5 .

3) Navrhnite vzorec alebo rekurentnú definíciu pre všetky členy postupnosti, ktorej prvé členy sú

   a) 4, 16, 36, 64, 100, ... ;

   b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{17}, \ldots$;

   c) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{12}, \dfrac{9}{20}, \ldots$;

   d) 3, 6, 30, 870, 74820, ... ;

   e) 3, 15, 35, 63, 99, ... ;

5) Koľko párov králikov sa narodí za rok, ak začíname s jediným párom, a ak každý mesiac každý pár privedie na svet nový pár, ktorý sa stane plodným od druhého mesiaca?

   Tento problém sa podľa všetkého po prvý raz objavil na začiatku trinásteho storočia v knihe, ktorý napísal istý Leonardo di Pisa, zvaný Fibonacci.

6) Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b platí $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

7) Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b platí

   $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

8) Dokážte, že ak a je také kladné číslo, že pre niektoré cele $n \geq 1$ platí $a^n > 1$, tak $a > 1$. Čo sa stane, keď a je záporné?

9) Dokážte, že ak $0 < a$ a existuje také n a 1, že $a^n < 1$, tak $a < 1$.

10) Dokážte, že ak $0 < a < b$, tak pre každé celé $n > 1$ je

$$\frac{a}{b} < \frac{b^n}{a^n}, \frac{a^n}{b^n} < \frac{a}{b}$$

11) Dokážte, že ak $0 < a < 1$, tak pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

12) Dokážte, že ak $0 < a < 1$, tak pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí $(1 - a)^n \geq 1 - na$, pričom pre $n \geq 2$ platí ostrá nerovnosť.

13) Dokážte, že pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ je číslo $3^{4n} + 2^{4n+3}$ deliteľné piatimi.

14) Dokážte, že pre každé $n = 1,2,3,.$ je číslo $2^{4n+3} + 3^{3n+1}$ deliteľné číslom 11.

15) Je pre platnosť Bernoulliho nerovnosti potrebný predpoklad, že $a > -1$? Využili sme ho v dôkaze? Kde?

16) V príklade 6 sme predpokladali, že $a \geq 0$. Existuje $a \in (-1, 0)$, pre ktoré tá nerovnosť neplatí?

17) Dokážte $(-1)^n = 1$ pre každé párne celé číslo n (kladné, záporné aj nulu).$(-1)^n = -1$ pre každé nepárne celé číslo n.

18) Ak $a \neq 0$, tak $a^n \neq 0$ pre každé celé n.

19) Ak $a > 0$, tak pre každé celé číslo n platí $a^n > 0$.

20) Ak $a \neq 0$, tak $a^n > 0$ pre každé párne celé číslo n.