

Séria č.12

Matematická indukcia.

- 1) Dokážte, že ak k je prirodzené číslo, tak číslo $\frac{k}{k+1}$ nie je celé.
- 2) Nech M je množina, ktorá obsahuje aspoň jedno celé číslo a má túto vlastnosť: ak $x \in M$, tak aj $x - 1 \in M$ aj $x + 1 \in M$. Dokážte, že množina M obsahuje všetky celé čísla.
- 3) Nech M je množina, ktorá obsahuje aspoň jedno celé číslo a ak $x \in M$, tak aj $x + 1 \in M$ aj $x - 1 \in M$. Dokážte, že M obsahuje všetky celé čísla.
- 4) Dokážte, že ak n je prirodzené číslo, tak číslo $3n(n + 1)$ je deliteľné šiestimi.
- 5) Dokážte, že ak n je celé číslo, tak číslo $3n(n + 1)$ je deliteľné šiestimi.
- 6) Dokážte, že ak n je celé číslo, tak číslo $n(n + 5)$ je deliteľné šiestimi.
- 7) Dokážte, že ak n je celé číslo, tak aj číslo $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ je celé. Nájdite také celé číslo n , aby číslo $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$ nebolo celé.
- 8) Dokážte, že ak n je celé číslo, tak číslo $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$ je tiež celé.
- 9) Dokážte, že ak n je celé číslo, tak aj číslo $\frac{(n-1)n(n+7)}{6}$ je celé.
- 10) Napíšte všetky prvočísla menšie alebo rovné 110.
- 11) Pre dané celé čísla a, b nájdite najväčší spoločný deliteľ a vyjadrite ho v tvare $ax + by$, kde x, y sú celé čísla.
 - (i) 527, 765; (ii) 361, 1178;
 - (iii) 12321, 8658; (iv) 108, 243;
 - (v) 132, 473; (vi) 156, 1740.
- 12) Najmenší spoločný násobok kladných celých čísel a, b definujeme ako najmenšie také kladné celé číslo, ktoré je deliteľné číslom a aj číslom b . Označujeme ho $\text{nsn}(a, b)$. Dokážte že, $\text{nsn}(a, b) \cdot \text{nsd}(a, b) = ab$.
- 13) Vypočítajte najmenší spoločný násobok čísel
 - (i) 25, 30; (ii) 42, 49;
 - (iii) 27, 81; (iv) 28, 29.
- 14) Ak n je prirodzené číslo, čomu sa rovná $\text{nsn}(n, n + 1)$ a $\text{nsd}(2n + 1, 2n + 1)$?
- 15) Dokážte, že $\text{nsn}(ab, ad) \leq a \text{nsn}(b, d)$.

16) Dokážte, že ak $D = \frac{d}{\text{nsd}(b, d)}$, $B = \frac{b}{\text{nsd}(b, d)}$, tak $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{aD + cB}{\text{nsn}(b, d)}$

17) Dokážte, že $\text{nsd}(a + b, a - b) \geq \text{nsd}(a, b)$.

18) Ak a, b, c sú celé čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, tak $\text{nsd}(a, \text{nsd}(b, c)) = \text{nsd}(\text{nsd}(a, b), c)$.

19) Definujte najväčší spoločný deliteľ $\text{nsd}(a, b, c)$ čísel a, b, c za predpokladu, že aspoň jedno z nich je nenulové. Definujte najmenší spoločný násobok $\text{nsn}(a, b, c)$ kladných celých čísel a, b, c . Platí pritom rovnosť $\text{nsn}(a, b, c) = \frac{abc}{\text{nsd}(a, b, c)}$. Ak nie, navrhните pravdivý vzorec.

20) Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y také, že

(i) $2x + 3y = 4$;

(ii) $17x + 19y = 23$;

(iii) $15x + 51y = 41$;

(iv) $23x + 29y = 25$;

(v) $10x - 8y = 42$;

(vi) $127x + 88y = 572$.