24 | Primitívne funkcie

V centre pozornosti tejto kapitoly sú funkcie, ktorých derivácie sú známe (dané). V podstate pôjde o to, že ak je daná nejaká diferenciálna forma, tak snahou bude nájsť funkciu, ktorej derivácia sa rovná práve tejto forme.

24.1 Koncept

Funkcia F sa nazýva ***primitívna k funkcii*** f ***na otvorenom intervale*** I, ak $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.

Príklad 24.1.1. *Funkcia sínus je primitívnou funkciou k funkcii kosínus na intervale* $(-\infty, \infty)$, *pretože* $\mathrm{D}\sin x = \cos x$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$. $\diamondsuit$

Príklad 24.1.2. *Funkcia* F, *určená predpisom*

$$F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

pre každé $x \in (1, \infty)$, *je na intervale* $(1, \infty)$ *primitívnou funkciou k funkcii* f, *určenej predpisom*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. *Naozaj, pre každé* $x \in (1, \infty)$ *platí*

$$\mathrm{D}F(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1+x}{1-x})^2} \, \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)\ . \qquad \diamondsuit$$

Príklad 24.1.3. *Funkcia* arctg *je na intervale* $(1, \infty)$ *taktiež primitívnou funkciou k funkcii* f *z príkladu 22.1.2, pretože pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$ *platí*

$$\mathrm{D}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} = f(x)\ .$$

Čiže primitívna funkcia k funkcii danej na intervale nie je jediná. Avšak jej sloboda nie je príliš široká.

Veta 24.1.1. *Ak F je primitívnou funkciou k funkcii f na otvorenom intervale I, tak funkcia G je na intervale I primitívnou funkciou k f práve vtedy, keď existuje také číslo c, že $G(x) = F(x) + c$ pre každé $x \in I$.*

Dôkaz. Ak F je na I primitívnou funkciou k F a súčasne $G(x) = F(x) + c$ pre $x \in I$, tak $\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}G(x) = f(x)$ pre $x \in I$. Takže G je na intervale I primitívnou funkciou k funkcii f.

Nech sú, obrátene, obe funkcie F a G primitívnymi funkciami k f na I. Potom majú F a G rovnaké derivácie v každom bode intervalu I. A teda podľa vety V.8.1**??** existuje také číslo c, že pre každé $x \in I$ platí rovnosť $G(x) = F(x) + c$. □

V nasledujúcom texte definíciu primitívnej funkcie nepatrne rozšírime a uvedieme ďalšiu interpretáciu.

Nech I je otvoreným intervalom a nech f, g a F sú funkcie. Skutočnosť, že rovnosť $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}g(x)$ platí pre každé $x \in I$, budeme označovať tak, že F je primitívnou funkciou k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}g$ na intervale I, a budeme písať

$$\int f\mathrm{d}g = F \quad \text{na } I\,. \tag{24.1}$$

Ako je známe zo state **??** rovnosť $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}g(x)$ platí v istom bode x práve vtedy, keď $\mathrm{D}F(x) = f(x)\mathrm{D}g(x)$. Takže (22.1) znamená, že $\mathrm{D}F(x) = f(x)\mathrm{D}g(x)$ pre každé $x \in I$. Inými slovami, funkcia F je primitívnou funkciou k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}g$ na intervale I práve vtedy, keď je primitívnou funkciou k funkcii $f\mathrm{D}g$ na I.

Príklad 24.1.4. *Je zrejmé, že na intervale $(-\infty, \infty)$ platí*

$$\int \frac{1}{1+(x^3+2x)^2}\,\mathrm{d}(x^3+2x) = \operatorname{arctg}\,(x^3+2x)\,,$$

pretože, ak

$$f = \frac{1}{1+(x^3+2x)^2}, \qquad g = x^3+2x \qquad \text{a} \qquad F = \operatorname{arctg}\,(x^3+2x)\,,$$

tak je splnené $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}g(x)$ alebo $\mathrm{D}F(x) = f(x)\mathrm{D}g(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. ◊

Keďže derivácia identickej funkcie x sa rovná 1 v každom bode, funkcia F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I práve vtedy, keď F je primitívnou funkciou k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}x$ na I. A teda skutočnosť, že funkcia F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I sa symbolicky zaznamená zápisom

$$\int f\mathrm{d}x = F \text{ na } I\,. \tag{24.2}$$

Napríklad, $\int \cos \mathrm{d}x = \sin$ na $(-\infty, \infty)$.

Výrok (22.1) možno zapísať aj ako

$$\int f(x)\mathrm{d}g(x) = F(x),\ x \in I\,. \tag{24.3}$$

V uvedenom zápise možno bez zmeny významu namiesto písmena x použiť ľubovoľné iné písmeno okrem takého, ktoré má vymedzený význam. Čiže (22.1) je možné rovnako dobre zapísať ako $\int f(y)\mathrm{d}g(y) = F(y)$, $y \in I$ alebo $\int f(u)\mathrm{d}g(u) = F(u)$, $u \in I$, atď. Písmeno „x“ je v (22.3) umelou premennou.

Príklad 24.1.5. *Platí*

$$\int 4x^6\mathrm{d}x^2 = x^8,\ x \in (-\infty, \infty)$$

pretože ak $F(x) = x^8$, $g(x) = x^2$ a $f(x) = 4x^6$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$, *tak* $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}g(x)$ *alebo* $\mathrm{D}F(x) = f(x)\mathrm{D}g(x)$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$.

Príklad 24.1.6. *Platí*

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+3),\ x \in (-\infty, \infty)$$

pretože, ak

$$F(x) = \frac{2x}{x^2+3} \quad \text{a} \quad f(x) = \ln(x^2+1)$$

pre $x \in (-\infty, \infty)$, *tak* $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$. *V tomto prípade* $g(x) = x$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$, *čiže* g *je identickou funkciou. A teda možno napísať* $\mathrm{d}F = f\mathrm{d}g$ *na* $(-\infty, \infty)$.

Výroky (22.1) a 22.3 majú formu rovnosti objektov. Avšak ľavá strana rovnosti (22.1), čiže $\int f\mathrm{d}g$, by sa nemala interpretovať ako symbol pre špecifickú funkciu či $\int f(x)\mathrm{d}g(x)$ ako symbol pre jej hodnotu. Samozrejme, ak $\int f\mathrm{d}g$ predstavuje funkciu, tak z (22.1) a súčasne z rovnosti

$$\int f\mathrm{d}g = G \quad \text{na } I$$

možno dedukovať, že $F = G$ na I. V opačnom prípade by sme mohli z príkladu 22.1.2 a 22.1.3 vyvodiť záver, že

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, čo samozrejme nie je pravda. Symbol $\int f\mathrm{d}g$ alebo $\int f(x)\mathrm{d}g(x)$ by sa teda mal používať jedine ako súčasť zápisu (22.1) či 22.3, naznačujúc fakt, že F je jednou z primitívnych funkcií k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}g$ na intervale I.

Akokoľvek, ak platia obidva vzťahy

$$\int f\mathrm{d}g = F \text{ na } I \quad \text{ a } \quad \int f\mathrm{d}g = G \text{ na } I,$$

tak podľa vety 22.1.1 sú F a G funkciami, ktorých rozdielom na I je konštantná funkcia. A preto niektorí autori používajú symbol $\int f\mathrm{d}g$ na označenie nejakej primitívnej funkcie k $f\mathrm{d}g$ a v dôsledku toho pripúšťajú nejednoznačnosť. Akákoľvek rovnosť narábajúca s takýmito symbolmi môže byť preto korektná „až na konštantnú funkciu“. Ale s vedomím, že spomínaná nejednoznačnosť nie je príliš veľká a situácia je pod kontrolou, je používanie $\int f\mathrm{d}g$ ako symbolu na označenie primitívnej funkcie k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}g$ (alebo funkcii $f\mathrm{D}g$) prípustné.

Na prvý pohľad by sa zdalo čudným, že sme na zápis toho, že funkcia F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I, nezaviedli jednoduchší spôsob označenia, a to konkrétne

$$\int f = F \text{ na } I. \tag{24.4}$$

Zaangažovanie diferenciálnej formy $f\mathrm{d}x$ (ktorá je abstraktnejším objektom než funkcia f) sa javí ako nadbytočné. A skutočne, niektorí autori navrhujú práve také jednoduchšie označovanie, akým je (22.4). Avšak, žiadny z takýchto podnetov nebol všeobecne akceptovaný, hoci v princípe na ňom nie je nič zlé. Tradícia je, zdá sa, príliš silná.

Keď sa v minulosti zaviedlo označovanie ako (22.1), (22.2) alebo (22.3), bola v poporedí záujmu interpretácia F ako primitívnej funkcie k diferenciálnej forme. Tento spôsob sa tak etabloval, že zotrváva až doteraz, keď sa preferuje skôr rozprávanie o primitívnej funkcii k funkcii než k diferenciálnej forme. Na objasnenie môže poslúžiť zaujímavý fakt, že aj napriek väčšiemu stupňu abstrakcie je tradičný zápis určite výhodnejší v rutinných výpočtoch manipulatívneho typu.

Cvičenia

1. *Dokážte, že* $\int \mathrm{d}g = g$ *na* I*, vždy keď* g *je funkciou diferencovateľnou v každom bode intervalu* I*.*
2. *Ukážte, že existuje také číslo* c*, že* $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + c$ *pre každé* $x \in (1, \infty)$*. Nájdite číslo* c*.*
3. *Nech* M *je zjednotením otvorených intervalov* I *a* J*, ktoré nemajú spoločný bod. Hovoríme, že funkcia* g *je primitívnou funkciou k funkcii* f *na množine* M*, ak* $\mathrm{D}g(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in M$*.*
   Ukážte, že funkcia $(|x| - 1)/x$ *je primitívnou funkciou k* $1/x^2$ *na množine* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$*. Odôvodnite, že rovnako funkcia* $(x - 1)/x$ *a funkcia* $-1/x$ *sú primitívnymi k* $1/x^2$ *na* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$*.*
4. *Predchádzajúce cvičenie ilustruje neplatnosť vety 22.1.1, ak sa v jej predpokladoch zamení interval za množinu iného typu. To je dôvod, prečo sa primitívnymi funkciami zaoberáme iba na intervaloch. Ako vetu 22.1.1 nanovo sformulovať pre množiny takého druhu, aké figurujú v cvičení 3?*

24.2 Prvé vzorce

Z ľubovoľného vzorca na určenie derivácie funkcie na nejakom intervale možno získať vzorec na nájdenie primitívnej funkcie k istej funkcii na tomto intervale. V nasledujúcom texte nanovo uvedieme niektoré zo vzorcov zo statí **??**IV, VII a VIII ako vzorce na hľadanie primitívnych funkcií. Ich platnosť možno jednoducho overiť na základe toho, že $\int f \,\mathrm{d}x = F$ na I práve vtedy, keď $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$, a preto ich dôkazy vynecháme.

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} \text{ na } (-\infty, \infty) \tag{24.5}$$

pre ľubovoľné nezáporné celé číslo n.

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+\alpha}\, x^{n+\alpha} \text{ na } (0, \infty) \tag{24.6}$$

pre každé číslo $\alpha \neq -1$.

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x \text{ na } (0, \infty) \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(-x) \text{ na } (-\infty, 0). \tag{24.7}$$

$$\int \exp x \,\mathrm{d}x = \exp x \text{ na } (-\infty, \infty). \tag{24.8}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\, a^x \text{ na } (-\infty, \infty) \tag{24.9}$$

pre ľubovoľné kladné číslo $a \neq 1$.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \text{ na } (-\infty, \infty) \tag{24.10}$$

pre ľubovoľné číslo $a \neq 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} \text{ na } (-|a|, |a|) \tag{24.11}$$

pre ľubovoľné číslo $a \neq 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, \mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \text{ na } (-\infty, \infty) \tag{24.12}$$

pre ľubovoľné číslo $a \neq 0$.

$$\int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x \quad \text{ a } \quad \int \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x \text{ na } (-\infty, \infty). \tag{24.13}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x \text{ na } \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi\right), \tag{24.14}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}x = \operatorname{cotg} x \text{ na } \left(n\pi, (n+1)\pi\right)$$

pre ľubovoľné celé číslo n.

$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \text{ na } \left((2n\pi, (2n+1)\pi\right), \tag{24.15}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \ln\left(-\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \text{ na } \left((2n-1)\pi, 2n\pi\right)$$

pre ľubovoľné celé číslo n.

$$\int \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x = -\ln(\cos x) \text{ na } \left((2n - \tfrac{1}{2})\pi, (2n + \tfrac{1}{2})\pi\right), \tag{24.16}$$

$$\int \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x = -\ln(-\cos x) \text{ na } \left((2n + \tfrac{1}{2})\pi, (2n + \tfrac{3}{2})\pi\right)$$

pre ľubovoľné celé číslo n.

Veta 24.2.1. *Nech n je prirodzené číslo. Nech F_j je primitívna funkcia k funkcii f_j na otvorenom intervale I a c_j číslo pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom*

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j F_j$$

je primitívnou funkciou k funkcii

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$$

na intervale I.

Dôkaz. Platnosť tvrdenia vyplýva priamo z vety IV.6.3**??**. □

V krátkosti teda platí

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j \right) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} c_j \int f_j \, \mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Vo všeobecnosti sú splnené rovnosti

$$\int (f+g) \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}x + \int g \, \mathrm{d}x, \qquad \int (f-g) \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}x - \int g \, \mathrm{d}x,$$

$$\int cf \, \mathrm{d}x = c \int f \, \mathrm{d}x$$

na intervale I pre ľubovoľné funkcie f a g, ku ktorým na intervale I existujú primitívne funkcie, a číslo c.

V týchto zápisoch je uplatnené oprávnenie, o ktorom je zmienka v stati 22.1. Obozretnosť je teda namieste. Ak $\int (f+g) \, \mathrm{d}x$ označuje primitívnu funkciu, povedzme H, k funkcii $f+g$, $\int f \, \mathrm{d}x$ označuje primitívnu funkciu F k f a $\int g \, \mathrm{d}x$ analogicky označuje primitívnu funkciu G ku g na intervale I, tak nemožno tvrdiť, že $H = F + G$ na I. Avšak, existuje taká konštanta c, že $H(x) = F(x) = G(x) + c$ pre každé $x \in I$.

So zreteľom na toto upozornenie potom možno o niečo všeobecnejšie tvrdiť, že na intervale I

$$\int (f+g) \mathrm{d}h = \int f \mathrm{d}h + \int g \mathrm{d}h, \qquad \int (f-g) \mathrm{d}h = \int f \mathrm{d}h - \int g \mathrm{d}h,$$

$$\int cf \mathrm{d}h = c \int f \mathrm{d}h$$

Posledný vzťah treba chápať tak, že ak F je primitívnou funkciou k diferenciálnej forme $f\mathrm{d}h$ na intervale I, tak funkcia cF je primitívnou funkciou k diferenciálnej forme $cf\mathrm{d}h$ na I. Obdobne to platí aj pre súčty a rozdiely.

Cvičenia . . . .

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale I, ak*
   a) $f = 4x^3 + 8x^2 - 7$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   b) $f = (\frac{1-x}{x})^2$ *a* $I = (-\infty, 0)$ *alebo* $I = (0, \infty)$;
   c) $f = (10^x + 3^x)^3$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   d) $f = \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$ *a* $I = (n\pi, (n+1)\pi)$ *pre celé číslo* n;
   e) $f = \operatorname{tg}^2$ *a* $I = ((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$ *pre celé číslo* n;
   f) $f = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ *a* $I = (-2, 2)$;
   g) $f = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ *a* $I = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
   h) $f = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ *a* $I = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$;
   i) $f = \sqrt[3]{x}(1 - \sqrt[3]{x})$ *a* $I = (0, \infty)$.

24.3 Substitúcie

Z pravidla o derivovaní zloženej funkcie vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 24.3.1. *Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na otvorenom intervale J. Nech g taká funkcia, diferencovateľná v každom bode intervalu I, že $g(x) \in J$ pre každé $x \in I$. Potom je zložená funkcia $F \circ G$ primitívnou funkciou k funkcii $(f \circ g)\mathrm{D}g$ na intervale I.*

Dôkaz. Podľa vety IV.7.1**??** ak $G = F \circ g$, tak $\mathrm{D}G(x) = \mathrm{D}F(g(x))\mathrm{D}g(x)$ pre každé $x \in I$. Predpokladá sa, že $\mathrm{D}F(y) = f(y)$ pre každé $y \in J$. A teda $\mathrm{D}G(x) = f(g(x))\mathrm{D}g(x) = (f \circ g)(x)\mathrm{D}g(x)$ pre $x \in I$. To však znamená, že $G = F \circ g$ je primitívnou funkciou $(f \circ g)\mathrm{D}g$ na I. □

Na praktické účely možno uvedený výsledok sformulovať do takéhoto pravidla:

Ak

$$\int f(y)\mathrm{d}y = F(y),\ y \in J, \tag{24.17}$$

tak

$$\int f(g(x))\mathrm{D}g(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)),\ x \in I. \tag{24.18}$$

Príklad 24.3.1. *Nájdime primitívnu funkciu k funkcii* $\sin^3 \cos$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Aby sme našli primitívnu funkciu k funkcii $\sin^3 \cos$ na intervale $(-\infty, \infty)$ zvoľme $f(y) = y^3$, $y \in (-\infty, \infty)$, $F(y) = \frac{1}{4}\, y^4$, $y \in (-\infty, \infty)$ a $g(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$. Potom je splnená rovnosť (22.17), pretože $f(g(x))\mathrm{D}g(x) = \sin^3 x \cos x$, $x \in (-\infty, \infty)$, a súčasne $F(g(x)) = \frac{1}{4}\, \sin^4 x$, $x \in (-\infty, \infty)$. A teda podľa (22.18) platí

$$\int \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\, \sin^4 x,\ x \in (-\infty, \infty). \qquad \diamond$$

Postup využívajúci vetu 22.3.1 sa nazýva výpočet primitívnej funkcie metódou substitúcie. Veľakrát to možno urobiť veľmi jednoducho, takmer mechanicky. Nech zloženú funkciu $f \circ g$ (ako často predtým) označuje symbol $f(g)$ a $F \circ g$ symbol $F(g)$, a súčasne pripomeňme, že $\mathrm{d}g = \mathrm{D}g\,\mathrm{d}x$. Potom možno predpis (22.18) napísať ako

$$\int f(g)\mathrm{d}g = F(g) \text{ na } I. \tag{24.19}$$

Predpis (22.19) je možné odvodiť z (22.17) jednoduchou zámenou umelej premennej funkciou g.

Príklad 24.3.2. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{x}{1+x^2}$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Nech $g = 1 + x^2$, čiže $\mathrm{d}g = 2x\,\mathrm{d}x$. A keďže

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln y,\ y \in (0, \infty)$$

a súčasne $g(x) \in (0, \infty)$ pre každé $(-\infty, \infty)$, tak na intervale $(-\infty, \infty)$ sú splnené rovnosti

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{g}\,\mathrm{d}g = \ln \sqrt{1+x^2}. \qquad \diamond$$

Predcházajúce príklady ilustrujú výpočet primitívnej funkcie k $(f \circ g)\mathrm{D}g$ v situácii, keď je primitívna funkcia k f známa alebo ju možno jednoducho vypočítať. Substitučnú metódu je možné použiť aj na hľadanie primitívnej funkcie k f, ak je známa primitívna funkcia k $f \circ g\mathrm{D}g$.

Veta 24.3.2. *Ak f, F a g sú funkciami spĺňajúcimi predpoklady vety 22.3.1, tak ku g existuje inverzná funkcia h s definičným oborom J, a zároveň ak*

$$\int f(g(y))\mathrm{D}g(y)\,\mathrm{d}y = G(y),\ y \in I, \tag{24.20}$$

tak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(h(x)),\ x \in J. \tag{24.21}$$

Dôkaz. Ak v rovnosti (22.20) budeme namiesto g uvažovať o h, dostaneme vzťah

$$\int f\big(g(h(x))\big)\mathrm{D}g(h(x))\mathrm{D}h(x)\,\mathrm{d}x = G(h(x)),\ x \in J.$$

Keďže $g(h(x)) = x$ a podľa vety **??**IV.7.1 pre $x \in J$ platí $\mathrm{D}g(h(x))\mathrm{D}h(x) = 1$, predchádzajúca rovnosť je vlastne vzťahom (22.21). $\square$

Príklad 24.3.3. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii $\frac{1}{3x-1}$ na intervale $(\frac{1}{3}, \infty)$.*

Riešenie: Uvažujme, že $J = (\frac{1}{3}, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ pre $x \in J$ a zároveň $I = (0, \infty)$, $g(y) = \frac{y+1}{3}$ pre $y \in I$, ako aj $G(y) = \frac{1}{3}\ln y$ pre $y \in I$. To v podstate znamená, že $J = \{g(y) :\ y \in I\}$ a inverznou funkciou ku g je h, definovaná predpisom $h(x) = 3x - 1$ pre $x \in J$. Okrem toho pre $y \in (0, \infty)$ platí aj $\mathrm{D}g(y) = \frac{1}{3}$ a $f(g(y))\mathrm{D}g(y)\frac{1}{3}y$, čiže je splnený predpoklad (22.20). Možno teda použiť (22.21), a teda

$$\int \frac{1}{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(3x-1),\ x \in (\frac{1}{3}, \infty). \qquad \Diamond$$

Na rutinné použitie vo výpočtoch možno sformulovať takéto pravidlo: Ak $\int f(g)\mathrm{d}g = G$ na I, tak $\int f\,\mathrm{d}x = G(h)$ na I, pričom h je inverznou funkciou ku g.

Ak je funkcia G určená formulou $G = F(g)$ (opäť aj tu je $F(g) = F \circ G$ zloženou funkciou), tak $G(h) = F(g(h)) = F(x) = F$. To znamená, že pravidlo možno stanoviť bez explicitného zahrnutia h ako inverznej funkcie k funkcii g:

Ak

$$\int f(g)\mathrm{d}g = F(g) \text{ na } I,$$

tak

$$\int f\,\mathrm{d}x = F \text{ na } J.$$

Príklad 24.3.4. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{1}{4x^2+8x+13}$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Rovnosť $4x^2+8x+13 = 4(x+1)^2+9$ ponúka použiť substitúciu $2(x+1) = 3g$. Takže $2\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}g$ či $\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\mathrm{d}g$, a teda $g = \frac{3}{2}(x+1)$. Z toho vyplýva, že na $(-\infty, \infty)$ platí

$$\int \frac{1}{4x^2+8x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4(x+1)^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9g^2+9}\,\frac{3}{2}\,\mathrm{d}g =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{g^2+1}\,\mathrm{d}g = \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,g = \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2(x+1)}{6}. \qquad \diamondsuit$$

Použité pravidlo však nebolo sformulované príliš dôkladne. A to v zmysle toho, že pri hľadaní primitívnych funkcií (využívajúc substitúciu či inú metódu) nemusíme byť príliš puntičkárski a úzkostlivo kontrolovať všetky predpoklady použitých tvrdení. Totiž samotné výsledky možno preveriť diferenciáciou. Oveľa jednoduchšie ako celý postup korektne založiť na overených metódach je odhadnúť primitívnu funkciu a skontrolovať ju diferencovaním.

Cvičenia

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii* f *na intervale* I, *ak*
   - a) $f = \frac{2x-1}{x^2-x+7}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - b) $f = \frac{1}{x}\ln x$ a $I = (0, 1)$ alebo $I = (1, \infty)$;
   - c) $f = x\sqrt{1+x^2}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - d) $f = x\sqrt{1+3x^2}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - e) $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - f) $f = x^2(1+4x^3)^{-\frac{1}{3}}$ a $I = (-4^{-\frac{1}{3}}, \infty)$;
   - g) $f = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - h) $f = (x+2)\sqrt{3x^2+12x+4}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - i) $f = x\exp x^2$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - j) $f = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ a $I = (0, \infty)$;
   - k) $f = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ a $I = (-\infty, \infty)$;
   - l) $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ a $I = (-\infty, \infty)$;

m) $f = \frac{x}{4+\sqrt{x+4}}$ *a* $I = (-4, \infty)$*;*

n) $f = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ *a* $I = (-3, 3)$*;*

o) $f = \sqrt{\frac{9-x^2}{x}}$ *a* $I = (-3, 0)$ *alebo* $I = (0, 3)$*;*

p) $f = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ *a* $I = (-3, 3)$*;*

r) $f = \frac{\sin}{\sqrt{4-\cos^2}}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$*;*

s) $f = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$ *a* $I = (\frac{1}{2}, \infty)$*.*

2. *Ukážte, že ak je funkcia* f *diferencovateľná v každom bode nejakého intervalu* I*, tak*

   a) $\int \mathrm{D}f(x) \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos f(x)$*,* $x \in I$*;*

   b) $\int \frac{1}{1+f^2(x)} \mathrm{D}f(x)\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} f(x)$*,* $x \in I$*.*

3. *Ak funkcia* f *je diferencovateľnou a nadobúda kladnú hodnotu v každom bode nejakého intervalu* I*? tak* $\int f^{-1}(x)\mathrm{D}f(x) = \ln f(x)$*,* $x \in I$*. Uvedené tvrdenie dokážte.*

24.4 Metóda per partes

Metóda, ktorou sa budeme zaoberať v tejto kapitole, vychádza zo vzťahu na deriváciu súčinu dvoch funkcií.

Veta 24.4.1. *Nech* f *a* g *sú funkcie diferencovateľné v každom bode otvoreného intervalu* I *a nech* H *je primitívnou funkciou k funkcii* $g\mathrm{D}f$ *na* I*. Potom je* $fg - H$ *primitívnou funkciou k funkcii* $f\mathrm{D}g$ *na intervale* I*.*

Dôkaz. Nech podľa predpokladu $\mathrm{D}H(x) = g(x)\mathrm{D}f(x)$ pre každé $x \in I$. Ak je splnená rovnosť $G = fg - H$, tak podľa viet **??**IV.6.3 a IV.6.4 platí $\mathrm{D}G(x) = f(x)\mathrm{D}g(x) + g(x)\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}H(x) = f(x)\mathrm{D}g(x)$ pre každé $x \in I$. To však znamená, že G je primitívnou funkciou k funkcii $f\mathrm{D}g$ na I. □

Uvedené tvrdenie sa tradične zapisuje vo forme

$$\int f\mathrm{D}g\, \mathrm{d}x = fg - \int g\mathrm{D}f\, \mathrm{d}x \text{ na } I \tag{24.22}$$

alebo

$$\int f\mathrm{d}g = fg - \int g\mathrm{d}f \text{ na } I. \tag{24.23}$$

S využitím voľnej premennej

$$\int f(x) \mathrm{D} g(x)\, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x) \mathrm{D} f(x)\, \mathrm{d}x,\ x \in I \tag{24.24}$$

či

$$\int f(x) \mathrm{d} g(x) = f(x)g(x) - \int g(x) \mathrm{d} f(x),\ x \in I. \tag{24.25}$$

Aj pri využívaní týchto vzťahov netreba zabúdať na zvyčajnú pozornosť. Ak symboly $\int f \mathrm{D} g\, \mathrm{d}x$ a $\mathrm{D} f\, \mathrm{d}x$ (resp. $\int f \mathrm{d} g$ a $\int g \mathrm{d} f$) označujú príslušné primitívne funkcie, tak rozdielom medzi pravou a ľavou stranou rovností (22.22) (resp. (22.23)) je konštantná funkcia na I, ktorá sa na I nutne nemusí rovnať 0.

Príklad 24.4.1. *Aby sme našli primitívnu funkciu k funkcii* $x \exp x$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$, *uvažujme, že* $f = x$ a $\mathrm{D} g = \exp x$. *A teda* $\mathrm{D} f = x^0 = 1$ *a súčasne* $g = \exp x$. *Zo vzťahu* (22.22) *potom vyplýva, že*

$$\int x \exp x\, \mathrm{d}x = x \exp x - \int \exp x\, \mathrm{d}x = x \exp x - \exp x \text{ na } (-\infty, \infty)\,. \quad \Diamond$$

Spôsob výpočtu primitívnej funkcie založený na vete 22.4.1 sa nazýva ***metóda per partes***. Úspešný výsledok závisí od rozumnej voľby funkcií f a g.

Príklad 24.4.2. *(Neúspešný pokus.) Ak zvolíme* $f = \exp x$ a $\mathrm{D} g = x$, *tak* $\mathrm{D} f = \exp x$ a $g = \frac{1}{2} x^2$ *(alebo* $g = \frac{1}{2} x^2$ *plus nejaká konštantná funkcia), čiže podľa* (22.22) *dostávame*

$$\int x \exp x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, x^2 \exp x - \frac{1}{2} \int x^2 \exp x\, \mathrm{d}x\,.$$

Problém hľadania primitívnej funkcie k funkcii $x^2 \exp x$ *je oveľa ťažší než nájdenie primitívnej funkcie k* $x \exp x$. *Takže situáciu sme si vlastne skomplikovali.* $\Diamond$

Príklad 24.4.3. *Nech* $n \neq -1$. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $x^n \ln x$ *na intervale* $(0, \infty)$.

Riešenie: Nech $f(x) = \ln x$ a $\mathrm{D} g(x) = x^n$ pre $x \in (0, \infty)$, čiže $\mathrm{D} f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pre $x \in (0, \infty)$, a preto

$$\int x^n \ln x\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},\ x \in (0, \infty).$$

Číslo n nemusí byť nutne celé. $\Diamond$

Príklad 24.4.4. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{\ln x}{x}$ *na* $(0, \infty)$.

Riešenie: Voľba $f = \ln x$ a $\mathrm{D}g = \frac{1}{x}$ (zúžiac na interval $(0, \infty)$), a teda $\mathrm{D}f = \frac{1}{x}$ a $g = \ln x$, vedie ku rovnosti

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ na } (0, \infty).$$

Hoci sme nenašli požadovanú primitívnu funkciu, získali sme vzťah, z ktorého ju možno vypočítať. Takže

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x \text{ na } (0, \infty).$$

Výsledok je možné jednoducho overiť diferencovaním. ◊

Príklad 24.4.5. *Nech* $n \geq 0$ *je celým číslom. Vyriešme problém nájdenia primitívnej funkcie k funkcii* $x^n \exp x$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Ak $n = 0$, tak problém je podľa vzorca (22.8) vyriešený.

Predpokladajme, že $n > 0$. Zvoľme $f = x^n$, $\mathrm{D}g = \exp x$, čiže platí $\mathrm{D}f = nx^{n-1}$ a $g = \exp x$. Využijúc (22.22) dostaneme

$$\int x^n \exp x\,\mathrm{d}x = x^n \exp x - n\int x^{n-1} \exp x\,\mathrm{d}x \text{ na } (-\infty, \infty). \tag{24.26}$$

Samozrejme, bezprostredne to nevyriešilo náš problém, avšak vhodnou interpretáciou vzťahu (22.26) možno získať induktívnu procedúru na nájdenie hľadanej primitívnej funkcie.

Ako už bolo v predchádzajúcom texte uvedené, ak predpokladáme, že $F_0 = \exp x$, tak F_0 je primitívnou funkciou k funkcii $x^0 \exp x$ na $(-\infty, \infty)$.

A ďalej, ak F_{n-1} je primitívnou funkciou k funkcii $x^{n-1} \exp x$ na intervale $(-\infty, \infty)$, tak rovnosť (22.26) v podstate hovorí, že funkcia

$$F_n = x^n \exp x - nF_{n-1} \tag{24.27}$$

je primitívnou funkciou k $x^n \exp x$ na $(-\infty, \infty)$ pre $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Ide teda o induktívnu procedúru, ktorá potvrdzuje fakt, že primitívna funkcia k $x^n \exp x$ existuje pre ľubovoľne dané n.

Použijúc (22.27) postupne dostaneme, že (v zhode s príkladom 22.4.1)

$$F_1 = x \exp x - F_0 = x \exp x - \exp x, \text{ a navyše}$$

$$F_2 = x^2 \exp x - 2F_1 = x^2 \exp x - 2x \exp x + 2 \exp x,$$

$$F_3 = x^3 \exp x - 3F_2 = x^3 \exp x - 3x^2 \exp x + 6x \exp x - 6 \exp x,$$

$F_4 = x^4 \exp x - 4F_3 = x^4 \exp x - 4x^3 \exp x + 12x^2 \exp x - 24x \exp x + 24 \exp x$

a tak ďalej.

Napríklad,

$$\int x^3 \exp x \,\mathrm{d}x = x^3 \exp x - 3x^2 \exp x + 6x \exp x - 6 \exp x \text{ na } (-\infty, \infty). \quad \Diamond$$

Príklad 24.4.6. *Nech $n \geq 0$ je celým číslom. Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii $\sin^n x$ na intervale $(-\infty, \infty)$.*

Riešenie: Predpokladajme, že hľadaná primitívna funkcia existuje a označme ju G_n. Presnejšie, uvažujme, že $G_0 = x$ a $G_1 = -\cos x$. Ak $n \geq 2$, tak

$$G_n = \int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int \sin^{n-2} x \sin^2 \,\mathrm{d}x = \int \sin^{n-2} x(1 + \cos^2 x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = G_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Posledný člen možno vypočítať metódou per partes. Zvoľme $f = \cos x$, $\mathrm{D}g = \sin^{n-2} x \cos x$, $\mathrm{D}f = -\sin x$, $g = \frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$. Potom

$$\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\cos x \sin^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n-1} \int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} G_n.$$

A teda

$$G_n = G_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} G_n,$$

z čoho vyplýva, že

$$G_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} G_{n-2}\,. \qquad \Diamond$$

Nenašli sme síce G_n pre každé $n \geq n$, ale získali sme rekurentný vzťah, ktorý (induktívne) dokazuje existenciu G_n pre každé $n \geq n$ a zároveň aj umožňuje pre dané n vypočítať G_n.

Napríklad,

$$\sin^6 x \,\mathrm{d}x = G_6 =$$

$$= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} G_4 = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4} G_2\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{6 \cdot 4} \cos x \sin^3 x - \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cos x \sin x + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2}\, x.$$

Príklad 24.4.7. *Nájdime primitívnu funkciu k funkcii* $\sin^n x$ *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Problém vyriešime kombináciou substitučnej metódy a metódy per partes. Uvažujme o funkcii $y = x^2$, čiže $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. Ak použijeme metódu per partes, tak (vzhľadom na výsledok príkladu 22.4.1) dostaneme

$$\int x^3 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int y \exp y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} y \exp y - \frac{1}{2}\int \exp y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\exp y - \frac{1}{2}\exp y = \frac{1}{2}x^2 \exp x^2 - \frac{1}{2}\exp x^2 \text{ na } (-\infty, \infty). \qquad \Diamond$$

Cvičenia

1. *Vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii* f *na intervale* I*, ak*
   - *a)* $f = x\sqrt{/}1 + x($ *a* $I = (-1, \infty)$;
   - *b)* $f = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ *a* $I = (-1, \infty)$;
   - *c)* $f = x^3\sqrt{x^2 + 2}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *d)* $f = (x-1)^2(x-2)^{12}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *e)* $f = x \sin x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *f)* $f = x^2 \sin x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *g)* $f = x \cos 2x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *h)* $f = x^3 \operatorname{arctg} x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *i)* $f = x^3 \cos 2x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *j)* $f = x^5 \exp x^3$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *k)* $f = \ln x$ *a* $I = (0, \infty)$;
   - *l)* $f = \operatorname{arctg} x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *m)* $f = \arccos x$ *a* $I = (-1, 1)$;
   - *n)* $f = x \sin x^2 \cos x^2$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;
   - *o)* $f = \exp\sqrt{x}$ *a* $I = (0, \infty)$;
   - *p)* $f = \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}$ *a* $I = \big((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi\big)$ *pre nejaké celé číslo* n*;*
   - *q)* $f = \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\,\sin 2x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$.
2. *Nájdite rekurentný vzorec na výpočet primitívnej funkcie k* $\cos^n$ *na* $(-\infty, \infty)$*, pričom* $n \geq 0$ *je celé číslo.*

3. *Na intervale* $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, k *je nejaké celé číslo, určte rekurentný vzorec na výpočet primitívnej funkcie k* $\sin^{-n}$ *na* $(-\infty, \infty)$, *pričom* $n \geq 0$ *je celé číslo.*
   Na rovnakom intervale vypočítajte aj primitívnu funkciu k $\frac{1}{\sin^3 x}$.
4. *Ukážte, že pre ľubovoľné celé číslo* n *existuje primitívna funkcia* F_n *k funkcii* $\operatorname{tg}^n x$ *na ľubovoľnom otvorenom intervale* I *obsiahnutom v definičnom obore funkcie* tg. *Ukážte, že* F_n *možno zvoliť tak, aby pre* n *platila rovnosť*
   $$(n-1)F_n = \operatorname{tg}^{n-1} x - (n-1)F_{n-2} \text{ na } I.$$
   Potom vypočítajte primitívnu funkciu k tg^6.
5. *Dokážte, že ak* $a \neq 0$, *tak pre* $n \neq -\frac{1}{2}$ *platí*
   $$\int \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a(2n+1)}\left(x^n\sqrt{ax+b} - nb\int \frac{x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}\right),\ x \in (-\frac{a}{b}, \infty).$$
6. *Dokážte, že ak* $a \neq 0$, *tak pre* $n \neq -\frac{3}{2}$ *a* $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ *platí*
   $$\int x^n\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{a(2n+3)}\left(x^n\sqrt{(ax+b)^3} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x\right).$$
7. *Nech* a, b *sú ľubovoľné čísla. Vypočítajte primitívnu funkciu k funkciám* $\exp(ax)\cos(bx)$ *a* $\exp(ax)\sin(bx)$ *na* $(-\infty, \infty)$.

24.5 Príklady – racionálne funkcie

Príklad 24.5.1. *Ak* a *je reálne a* $n > 1$ *celé číslo, tak*

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

na intervale $(-\infty, a)$ *a* (a, ∞). *Navyše, na* $(-\infty, a)$ *platí*

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln(a-x)$$

a súčasne na (a, ∞)

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln(x-a). \qquad \diamondsuit$$

Príklad 24.5.2. *Momentálne nie sme schopní sformulovať predpis definujúci primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ *priamo pre nejaké nezáporné celé číslo* n. *Jednako, matematickou indukciou môžme dokázať, že pre nezáporné celé číslo* n *existuje funkcia, pre ktorú platí*

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = K_n \tag{24.28}$$

na $(-\infty,\infty)$, *a zároveň poskytnúť rekurentný vzorec na výpočet* K_n *pre každé* $n = 1,\ 2\ \dots$

Keďže

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^0}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x$$

a súčasne

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x$$

na intervale $(-\infty,\infty)$, *tak* $K_0 = x$ *a* $K_1 = \operatorname{arctg}$.

Predpokladajme, že $n \geq 1$ *a funkcia* K_n *spĺňa* (22.28). *Teda platí*

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x^2+1)^n)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \tag{24.29}$$

$$= K_n - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

na $(-\infty,\infty)$. *A teraz použime metódu per partes. Vo vzťahu* (22.24) *zvoľme* $f = x$, $\mathrm{D}g = \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}$, $\mathrm{D}f = 1$, $g = -\frac{1}{2n(x^2+1)^n}$. *Takže*

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2n(x^2+1)^n} - \frac{-1}{2n(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n(x^2+1)} + \frac{1}{2n}\,K_n$$

na $(-\infty,\infty)$. *S predpokladom, že* K_n *je funkcia spĺňajúca* (22.28), *možno definovať*

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n}{2n-1}\,K_n. \tag{24.30}$$

Prostredníctvom matematickej indukcie je teda existencia funkcie spĺňajúcej (22.28) *pre každé nezáporné celé číslo* n *dokázaná. Vzorec* (22.30) *umožňuje výpočet:*

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = K_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + 2\operatorname{arctg} x,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = K_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x,$$

v oboch prípadoch na intervale $(-\infty,\infty)$. ◊

Príklad 24.5.3. *Nech* a, b, p, q *sú reálne čísla a* n *prirodzené číslo. Predpokladajme, že platí nerovnosť* $p^2 < 4q$, *a to tak, aby hodnota funkcie* $x^2 + px + q$ *bola v každom bode rôzna od* 0. *Potom*

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x \qquad (24.31)$$

na $(-\infty, \infty)$. *Ak* $n > 1$, *tak*

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}$$

na $(-\infty, \infty)$ *a súčasne*

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+px+q)$$

na intervale $(-\infty, \infty)$. *Druhý sčítanec na pravej strane rovnosti* (22.31) *sa dá podľa príkladu 22.5.2 zredukovať substitúciou* $x + \frac{p}{2} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,y$, $\mathrm{d}x = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,\mathrm{d}y$. *Čiže*

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^n} \int \frac{1}{(y^2+1)}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n} K_n(y) = \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n} K_n\left(\frac{x+p}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)$$

na $(-\infty, \infty)$. *Takže podľa* (22.31) *platí*

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}},$$

a *ak* $n > 1$, *tak*

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n} K_n\left(\frac{x+p}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)$$

na $(-\infty, \infty)$. $\Diamond$

Príklady v tejto kapitole poskytujú všetky nástroje potrebné na výpočet primitívnych funkcií k racionálnym funkciám g/f, pričom f a g sú polynómy a súčasne f je súčinom polynómov prvého a druhého stupňa (nutne nie odlišných). Každú takúto funkciu možno vyjadriť ako súčet polynómov, pričom príslušné primitívne funkcie sú uvedené v príklade 22.5.1 a 22.5.3.

Príklad 24.5.4. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii*

$$f = \frac{3x^7 + 18x^6 + 49x^5 + 79x^4 + 81x^3 + 62x^2 + 37x + 14}{x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 20x + 8}$$

na nejakom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou jej definičného oboru.

Riešenie: Najprv deľme čitateľa menovateľom tak, aby sme dostali

$$f = 3x^2 + 1 + \frac{x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 17x + 6}{x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 20x + 8}.$$

Kvôli rozkladu na parciálne zlomky budeme potrebovať faktorizáciu

$$x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 20x + 8 = (x + 2)(x^2 + 2x + 2)^2.$$

Existujú také čísla a, b, c, d a e, že

$$\frac{x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 17x + 6}{x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 20x + 8} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx + c}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{dx + e}{x^2 + 2x + 2}.$$

Porovnaním koeficientov či s pomocou niekoľkých (presne piatich) hodnôt je možné stanoviť, že

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -1,\ d = 0,\ e = 1.$$

A teda

$$f = 3x^2 + 1 + \frac{1}{x+2} + \frac{2x - 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$

Vzhľadom na predchádzajúci výsledok budeme v ďalšom texte považovať za definičný obor funkcie f množinu všetkých čísel okrem -2.

Po tomto kroku možno vypočítať, že

$$\int (3x^2 + 1)\, \mathrm{d}x = x^3 + x$$

na intervale $(-\infty, \infty)$,

$$\int \frac{1}{x+2}\, \mathrm{d}x = \ln|x + 2|$$

na ľubovoľnom otvorenom intervale neobsahujúcom -2,

$$\int \frac{2x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\frac{3x+5}{x^2+2x+2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x+1)$$

$$\text{a} \quad \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,(x+1)$$

na $(-\infty, \infty)$. Čiže

$$\int f\,\mathrm{d}x = x^3 + x + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\,\frac{3x+5}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x+1)$$

na ľubovoľnom otvorenom intervale neobsahujúcom číslo -2. ◊

Cvičenia

1. *Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, nájdite primitívnu funkciu k funkcii*

   a) $\frac{x+1}{x-3}$;

   b) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-6x}$;

   c) $\frac{1}{x^4-2x^3}$;

   d) $\frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2+x-2}$;

   e) $\frac{x^2+3x+3}{x^3+5x^2+6x}$;

   f) $\frac{1-x^3}{x^3+x}$;

   g) $\frac{x+1}{x^3-1}$;

   h) $\frac{1}{x^4-1}$;

   i) $\frac{1-x^3}{x^4-2x^3}$;

   j) $\frac{x^3}{(x-1)^2(x+2)^3}$;

   k) $\frac{x}{x^3+6x^2+30x+25}$;

   l) $\frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}$;

   m) $\frac{3x^2+5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}$;

   n) $\frac{1}{x^4-6x^3+10x^2-6x+9}$;

   o) $\frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$;

   p) $\frac{x^2-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}$;

   r) $\frac{1}{x^3(1+x)(1-x^4)}$;

   s) $\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}$;

   t) $\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$;

   u) $\frac{x^2+x-2}{(x+3)^2(x-1)(x^2+6x+10)}$;

   v) $\frac{x^8+x^6+2x^5+x^4+x^3-4x^2-2}{x^7+2x^5+x^3}$;

   w) $\frac{x^2+x-2}{(x+3)^2(x-1)(x^2+6x+10)^3}$.

24.6 Príklady – niektoré iracionálne funkcie

Nech α, β, γ, δ sú reálne a n_1, n_2, …, n_k prirodzené čísla. Ak f je funkcia vytvorená súčtom, rozdielom, súčinom alebo podielom konštánt, funkcie x a funkcií

$$\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad \sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$

tak substitúciou

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$

pričom n je vzájomným súčinom čísel n_1, n_2, …, n_k, sa problém hľadania primitívnej funkcie k funkcii f zredukuje na výpočet primitívnej funkcie k racionálnej funkcii.

Príklad 24.6.1. *Substitúcia* $x = y^6 - 1$, $\mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y$, *vedie k tomu, že*

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y^6-1}{y^2-y^3}6y^5\,\mathrm{d}y =$$

$$= -6\int(y^5+y^4+y^3+y^2+y+1)y^3\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}\,y^9-\frac{3}{4}\,y^8-\frac{6}{7}\,y^7-y^6-\frac{6}{5}\,y^5-\frac{3}{2}\,y^4 =$$

$$= -\frac{2}{3}\,(1+x)\sqrt{1+x}-\frac{3}{4}\,(1+x)\sqrt[3]{1+x}-\frac{6}{7}(1+x)\sqrt[6]{1+x}-$$

$$-1-x-\frac{6}{5}\,\sqrt[6]{(1+x)^5}-\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(1+x)^2}$$

na intervale $(-1, 0)$ *alebo* $(0, \infty)$. ♢

Nech a, b, c sú reálne čísla, $a \neq 0$. Nech f je funkcia vytvorená z konštánt, x a $\sqrt{a^x 2 + bx + c}$ racionálnymi operáciami (sčitovaním, odčitovaním, násobením a delením). Problém hľadania primitívnej funkcie k funkcii f možno zredukovať na hľadanie primitívnej funkcie k racionálnej funkcii prostredníctvom jednej z týchto (Eulerových) substitúcií:

Ak funkcia $ax^2 + bx + c$ má (reálny) koreň γ, tak možno použiť substitúciu

$$y = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\gamma}.$$

Ak $a > 0$, tak k výsledku vedie substitúcia

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}.$$

Ak $c > 0$, tak je vhodná substitúcia

$$y = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}.$$

Vo výpočtoch sa častokrát využíva viac než iba jedna z týchto substitúcií.

Príklad 24.6.2. *Nájdime primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Riešenie: Pri hľadaní riešenia použime substitúciu $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Čiže

$$x = \frac{y^2 - 1}{1 - 2y}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-2y^2 + 2y - 2}{(1 - 2y)^2} \ \mathrm{d}y,$$

a teda

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{\frac{-2y^2+2y-3}{(1-2y)^2}}{\frac{y^2-1}{1-2y} + \frac{y^2-1}{1-2y}} \ \mathrm{d}y = \int \frac{2y^2 - 2y + 2}{(y-2)(2y-1)} \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{y-2}\ \frac{1}{2y-1}\right) \mathrm{d}y = y + 2\ln|y-2| - \frac{1}{2}\ln|y - \frac{1}{2}| =$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - x + 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2\right| - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x - \frac{1}{2}\right)$$

na intervale $(-\infty, -1)$ alebo $(-1, \infty)$. ◊

Príklad 24.6.3. *Vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Riešenie: Najprv upravme funkčný predpis funkcie zo zadania.

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{(1-x)(x-3)} = \sqrt{\frac{(1-x)^2(x-3)}{1-x}} =$$

$$\overset{???}{=} (x-1)\sqrt{x-3}1 - x.$$

Poznamenajme, že definičným oborom funkcie je interval $(1, 3)$. Hľadať primitívnu funkciu budeme preto na tomto intervale.

Použime substitúciu

$$y = \sqrt{x-3}1 - x.$$

Z toho vyplýva, že

$$x = \frac{3 + y^2}{1 + y^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-4y}{(1 + y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

A teda
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{1}{\left(\frac{3+y^2}{1+y^2}-1\right)} \frac{-4y}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= -2\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -2\mathrm{arctg}\, y = -2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$$

na intervale $(1,3)$. $\Diamond$

Príklad 24.6.4. *Na ilustráciu použitia poslednej z vyššie uvedených Eulerových substitúcií vypočítajme primitívnu funkciu k funkcii* $\frac{1}{x(\sqrt{x^2-x+1}+x-1)}$ *na intervale* $(-\infty,0)$ *alebo na intervale* $(0,\infty)$*. (Poznamenajme, že definičným oborom tejto funkcie je zjednotenie dvoch spomínaných intervalov.)*

Riešenie: Definujme funkciu

$$y = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}.$$

V kontexte vyjadrenia tejto funkcie platí

$$x = \frac{1+2y}{1-y^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2y^2+2y+2}{(1-y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Čiže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x^2-x+1}-1)} = \int \frac{\frac{2y^2+2y+2}{(1-y^2)^2}}{\frac{1+2y}{1-y^2}\left(y\frac{1+2y}{1-y^2}+\frac{1+2y}{1-2y^2}\right)}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int \frac{2y^2+2y+2}{(1+2y)^2(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{3}{(1+2y)^2} - \frac{3}{1+2y} + \frac{2}{1+y}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{3}{2(1+2y)} - \frac{3}{2}\ln|1+2y| + 2\ln|1+y| = \frac{3}{2(2-x-2\sqrt{x^2-x+1})} -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right| + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x-1\right| - \frac{1}{2}\ln|x|$$

na intervale $(-\infty,0)$ a súčasne $(0,\infty)$. $\Diamond$

Cvičenia . . . .

1. Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii
   a) $\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\frac{1}{(x+2)(3x+5)}$;
   b) $\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$;
   c) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
   d) $\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}$;
   e) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
   f) $\sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}$.
2. Na vhodnom otvorenom intervale, obsiahnutom v definičnom obore príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii
   a) $\frac{1}{x+\sqrt{x(x+1)}}$;
   b) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$;
   c) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;
   d) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$;
   e) $\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$;
   f $\frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}$;
   g) $\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}$;
   h) $\sqrt{5x^2-6x-1}$;
   i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;
   j) $\frac{2x+1}{(x^2+2x+6)\sqrt{2x^2+4x-1}}$.
3. Výpočet primitívnej funkcie k funkcii $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$, možno zredukovať prostredníctvom afinnej substitúcie na problém hľadania primitívnej funkcie k $\frac{1}{\sqrt{x^2+\beta}}$ alebo $\frac{1}{\beta-x^2}$ pre isté číslo β. Nájdite túto substitúciu a vypočítajte príslušnú primitívnu funkciu.
4. Primitívnu funkciu k $\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ je možné vypočítať cez substitúciu $x-\alpha=\frac{1}{y}$. Takáto substitúcia redukuje problém na taký, ktorý figuroval v predchádzajúcom cvičení.
5. Využite výsledok z predchádzajúcej úlohy pri riešení úloh 2 b) a 2 i).
6. Ukážte, že ak p je polynóm stupňa $n \geq 1$, tak existuje taký polynóm q stupňa $n-1$ a číslo α, že

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

   na nejakom otvorenom intervale, na ktorom funkcia ax^2+bx+c nadobúda kladné hodnoty.
7. Využite výsledky piateho cvičenia a vyriešte úlohy 2 f), 2 h) a 2 g).

24.7 Príklady – niektoré transcendentné funkcie

Nech f je funkcia, ktorú možno skonštruovať z funkcií cos a sin a konštánt prostredníctvom racionálnych operácií (ich sčitovaním, odčitovaním, násobením a delením). Substitúcia

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{24.32}$$

pričom x je identickou funkciou na intervale $\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$ pre nejaké celé číslo k, redukuje problém hľadania primitívnej funkcie k f na problém hľadania primitívnej funkcie k racionálnej funkcii. Z dôvodov rutinného použitia tejto substitúcie poznamenajme, že z (22.32) vyplývajú rovnosti

$$x = 2\operatorname{arctg}(y + 2k\pi),\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y,\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\ \text{ a }\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Príklad 24.7.1. *Ak použijeme práve opísanú substitúciu, tak zistíme, že*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+y^2}}{\left(2+\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2y}{1+y^2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{2y}{3+y^2}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\ln|(3+y^2)y| = \frac{1}{3}\ln\left|\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

na intervale $(n\pi, (n+1)\pi)$ *pre nejaké celé číslo* n. ◊

V mnohých situáciách táto substitúcia vedie ku komplikovaným racionálnym funkciám (niektorým s polynómom v menovateli so zbytočne vysokým stupňom). Avšak vo veľa prípadoch sa výpočet dá zjednodušiť.

Ak je známa primitívna funkcia k funkcii g, tak je užitočným vzťah

$$\int g(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y,$$

pričom $y = \sin$.

Príklad 24.7.2.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\left(-1+\frac{2}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y = -y + 2\operatorname{arctg} y = \sin x - 2\operatorname{arctg}(\sin x)$$

na intervale $(-\infty, \infty)$.

Obdobne, možno použiť vzťah

$$\int g(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int g(y)\,\mathrm{d}y,$$

čo demonštruje využitie substitúcie $y = \cos$. $\Diamond$

Príklad 24.7.3.

$$\int \ln^2(\cos x)\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\ln^2(\cos x)}{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\ln^2 y}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\ln^3(\cos x)$$

na nejakom intervale, na ktorom cos *nadobúda iba kladné hodnoty.* $\Diamond$

Primitívna funkcia k funkcii $g(\mathrm{tg}\,x)$ sa často počíta prostredníctvom substitúcie $y = \mathrm{tg}\,x,\ \mathrm{d}x = (1+y^2)^{-1}\,\mathrm{d}y$.

Príklad 24.7.4.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(\sin x + \cos x)} = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+y^2}{1+y}\,\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \ln|1+y| = \ln|1+\mathrm{tg}\,x|$$

na intervale $\left(\frac{1}{2}(2k+1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ *alebo* $\left(\frac{1}{2}(2k+1)\pi, \frac{1}{2}(2k+3)\pi\right)$ *pre nejaké celé číslo* k. $\Diamond$

Ak $y = \exp x$, $x = \ln y$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y}$, tak možno odvodiť vzťah

$$\int g(\exp x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{g(y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Príklad 24.7.5.

$$\int \frac{\exp x}{2+\exp x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{2+y} = \ln(2+y) = \ln(2+\exp x)$$

na intervale $(-\infty, \infty)$. $\Diamond$

V niektorých prípadoch vedie k riešeniu problému kombinácia substitúcie a metódy per partes.

Príklad 24.7.6. *Najprv použime substitúciu* $y = \arccos x$, $x = \cos y$, $\mathrm{d}x = \sin y\,\mathrm{d}y$ *a potom metódou per partes napredujme v riešení problému*

$$\int \arccos^3 x\,\mathrm{d}x = -\int y^3 \sin y\,\mathrm{d}y = -y^3\cos y + 3y^2\sin y + 6y\cos y - 6\sin y =$$

$$= -\arccos^3 x\cos(\arccos x) + 3\arccos x + 3\arccos^2 x\sin(\arccos x) +$$

$$+6\arccos x\cos(\arccos x) - 6\sin(\arccos x) =$$

$$= -x\arccos^3 x + 3\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x + 6x\arccos x - 6\sqrt{1-x^2}$$

na intervale $(-1,1)$. $\Diamond$

Cvičenia

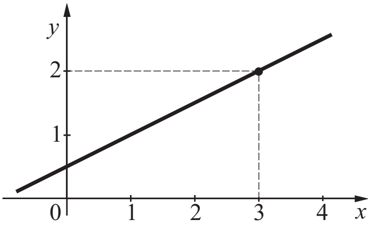
1. *Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii*

   a) $\frac{1}{3+\cos x}$;
   b) $\frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$;
   c) $(3x^2+1)\operatorname{arctg} x$;
   d) $\cos^2 x \sin^3 x$;
   e) $\operatorname{tg}^5 x$;
   f) $(\sin x + \cos 2x^2)\sin 2x$;
   g) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$;
   h) $\frac{\exp(2x)}{1+\exp x}$;
   i) $\frac{\exp x - 1}{\exp x + 1}$;
   j) $(\sin^3 x)\sqrt{\cos x}$;
   k) $\frac{1}{1+\exp(2x)}$;
   l) $(2x-1)\arcsin x$;
   m) $(\ln^2 \sin x)\operatorname{cotg} x$;
   n) $\frac{\arcsin x}{x^2}$;
   o) $x\ln(1+x^2)$;
   p) $(x^2+1)\sin^2 x$;
   q) $\frac{\operatorname{arctg}}{x^2}$;
   r) $\frac{1}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$;
   s) $\frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$;
   t) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;
   u) $(tgx)\ln(\cos x)$;
   v) $\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$;
   w) $\frac{\operatorname{tg} x}{\ln(\cos x)}$;
   x) $x \operatorname{arctg} x$.

24.8 Po častiach konštantné a afinné funkcie

Príklad 24.8.1. *Nech a a k sú čísla. Nech $g(x) = 0$ pre $x \le a$ a súčasne $g(x) = k(x-a)$ pre $x \ge a$ (pozri obr. 22.1). K funkcii g existuje na intervale $(-\infty, \infty)$ primitívna funkcia.*

Naozaj, ak $G(x) = 0$ pre $x \le a$ a $G(x) = \frac{1}{2}k(x-a)^2$ pre $x \ge a$, tak $\mathrm{D}G(x) = g(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. $\Diamond$



Obrázok 24.1.

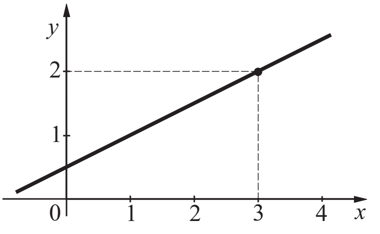
Príklad 24.8.2. *Nech a, b a c sú také čísla, že $a < b < c$. Nech $f(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, a)$, $f(b) = 1$, $f(x) = 0$ pre $x \in \langle c, \infty)$ a nech je funkcia f afinná na intervale $\langle a, b\rangle$ a zároveň tiež na intervale $(-\infty, \infty)$ (pozri obr. 22.2). Funkcia f má na intervale $(-\infty, \infty)$ primitívnu funkciu.*

Vyplýva to z vety 22.2.1, príkladu 22.8.1 a z vyjadrenia $f = g_1 - g_2 + g_3$, pričom

$g_1(x) = 0$ pre $x \le a$ a $g_1(x) = (b-a)^{-1}(x-a)$ pre $x \ge a$;

$g_2(x) = 0$ pre $x \le b$ a $g_2(x) = (c-a)(b-a)^{-1}(c-b)^{-1}(x-b)$ pre $x \ge b$;

$g_3(x) = 0$ pre $x \le c$ a $g_3(x) =???(b-a)(b-a)^{-1}(c-b)^{-1}(x-c)$ pre $x \ge c$. $\Diamond$



Obrázok 24.2.

Veta 24.8.1. *Nech a a b sú také čísla, že $a < b$, nech $\omega \in \langle a, b\rangle$ a nech c je nejaké číslo. Ak f je po častiach afinná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, tak existuje taká funkcia F, spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, že $F(\omega) = c$ a súčasne $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in (a, b)$.*

Dôkaz. Nech a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ sú také čísla, že $a_0 = a$, $a_{j-1} < a_j$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_n = b$ a súčasne je funkcia f afinná na intervale $\langle a_{j-1}, a_j\rangle$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Nech $a_{-1} = a - 1$ a $a_{n+1} = b + 1$. Nech pre každé $j = 0, 1, \ldots, n$ je f_j takou funkciou, že $f_j(x) = 0$ pre každé $x \le a_{j-1}$, $f_j(a_j) = 1$, $f_j(x) = 0$ pre každé $x \ge a_{j+1}$ a zároveň je f_j afinnou na intervale $\langle a_{j-1}, a_j\rangle$ i intervale $\langle a_j, a_{j+1}\rangle$. Potom platí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(a_j) f_j(x)$$

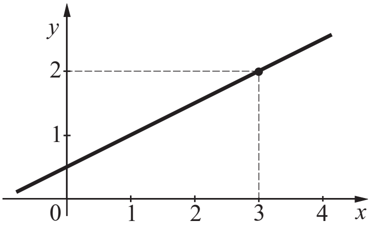
pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Samozrejme, pre ľubovoľné $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ táto rovnosť platí, ak $x = a_j$. Jej pravá strana je hodnotou funkcie afinnej na intervale $\langle a_{j-1}, a_j\rangle$ pre ľubovoľné $j = 1, 2, \ldots, n$ v bode x. Podľa príkladu 22.8.2 vety 22.2.1 existuje taká funkcia G, že

$$\mathrm{D}G(x) = \sum_{j=0}^{n} f(a_j) f_j(x)$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Nech $F(x) = G(x) - G(\omega) + c$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Funkcia F je potom spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí $F(\omega) = c$ a zároveň $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in (a, b)$. □

Príklad 24.8.3. *Nech u a v sú také čísla, že $u < v$ a nech c je ľubovoľné číslo. Nech f je takou funkciou, že $f(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, u)$, $f(x) = c$ pre $x \in (u, v)$ a $f(x) = 0$ pre každé $x \in (v, \infty)$. Potom existuje taká funkcia F, spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$, že rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ je splnená pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, $x \neq u$, $x \neq v$.*

Takúto funkciu je možné definovať tak, že $F(x) = 0$ pre $x \leq u$, $F(x) = c(x - u)$ pre $x \in \langle u, v\rangle$ a $F(x) = c(v - u)$ pre každé $x \in \langle v, \infty)$ (pozri obr. 22.3). ◊



Obrázok 24.3.

Veta 24.8.2. *Nech a a b sú také čísla, že $a < b$, nech f je po častiach konštantnou funkciou na intervale $\langle a, b\rangle$, nech $\omega \in \langle a, b\rangle$ a c je ľubovoľné číslo. Potom existuje taká funkcia F, spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, že $F(\omega) = c$ a $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každý taký bod $x \in (a, b)$, v ktorom je funkcia f spojitá.*

Dôkaz. Nech a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ sú také čísla, že $a_0 = a$, $a_{j-1} < a_j$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_n = b$ a súčasne nech je funkcia f nespojitá v každom a_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ a konštantná na intervale (a_{j-1}, a_j) pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Nech c_j je hodnotou funkcie f na intervale (a_{j-1}, a_j), $j = 1, 2, \ldots, n$. Nech pre každé $j = 1, 2, \ldots, n$ je F_j takou funkciou na $(-\infty, \infty)$, že $F_j(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, a_{j-1}\rangle$, $F_j(x) = c_j(x - a_{j-1})$ pre $x \in \langle a_{j-1}, a_j\rangle$ a $F_j(x) = c_j(a_j - a_{j-1})$ pre $x \in \langle a_j, \infty)$. Nech

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x)$$

pre každé $(-\infty, \infty)$. Potom je funkcia G spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$, a teda aj na $\langle a, b\rangle$, a súčasne $\mathrm{D}G(x) = f(x)$ pre každé také $x \in (a, b)$, že $x \neq a_j$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Nech $F(x) = G(x) - G(\omega) + c$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Potom je funkcia F spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, $F(\omega) = c$

a rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ platí pre každé také $x \in (a, b)$, že $x \neq a_j$ pre každé $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. $\square$

Cvičenia . . . .

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $|x|$ na intervale $(-\infty, \infty)$.*
2. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $|x^3|$ na intervale $(-\infty, \infty)$.*
3. *Ak g je funkciou z príkladu 22.8.1, tak $g(x) = \frac{1}{2}\,k(|x-a| + x - a)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Ak H je primitívnou funkciou k (skôr asi absolútnej hodnote) ???modulu, napíšte ???dole primitívnu funkciu ku g.*
4. *Nech $f = \frac{1}{2}\big(\big|1-|x|\big|+1-|x|\big)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.*
5. *Nech $f(x) = \arcsin(\sin x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.*
6. *Nech $f(x) = (-1)^{[x]}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-5, 5)$ a na intervale $(-\infty, \infty)$.*

24.9 Spojité funkcie

Veta 24.9.1. *Nech a a b sú také čísla, že $a < b$, nech f je spojitou funkciou na intervale $\langle a, b\rangle$, nech $\omega \in \langle a, b\rangle$ a c je ľubovoľné číslo. Potom existuje práve jedna taká funkcia F, spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, že $F(\omega) = c$ a $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in (a, b)$.*

Dôkaz. Nech pre každé prirodzené číslo n je g_n takou po častiach afinnou funkciou, že

$$|f(x) - g_n(x)| < 2^{-n} \tag{24.33}$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Podľa vety **??**III.6.2 taká funkcia g_n existuje pre každé $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Nech $g_0 = 0$ a nech

$$f_n = g_n - g_{n-1} \tag{24.34}$$

pre každé $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Potom

$$|f_n(x)| = |g_n(x) - g_{n-1}(x)| = |\big(f(x) - g_{n-1}(x)\big)\big(f(x) - g_n(x)\big)| \leq$$

$$\leq |f(x) - g_{n-1}(x)| + |f(x) - g_n(x)| < 2^{-n+1} + 2^{-n} = 3 \cdot 2^{-n}$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ a $n = 1, 2, \ldots$ Keďže postupnosť $\{3 \cdot 2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná, funkcionálna postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálne sumovateľná na $\langle a, b\rangle$. Podľa (22.33) a (22.34) platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.

Pre každé $n = 1, 2, \ldots$ je funkcia f_n po častiach afinná. A preto podľa vety 22.8.1 existuje taká funkcia F_n, spojitá na $\langle a, b\rangle$, že $F_n(\omega) = 0$ a $\mathrm{D}F_n(x) = f_n(x)$ pre každé $x \in (a, b)$. Vzhľadom na to, že postupnosť $\{F_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná, podľa vety **??**VI.3.1 je na intervale $\langle a, b\rangle$ normálne sumovateľná postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, a ak

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) + c$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, tak $F(\omega) = c$. Okrem toho, podľa vety **??**VI.2.1 je funkcia F spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a súčasne podľa vety **??**VI.3.1 pre každé $x \in (a, b)$ platí rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$.

Ak G je inou takou funkciou, spojitou na intervale $\langle a, b\rangle$, že $G(\omega) = c$ a $\mathrm{D}G(x) = f(x)$ pre každé $x \in (a, b)$, tak podľa vety **??**V.8.1 je rozdiel funkcií G a F konštantnou funkciou na $\langle a, b\rangle$. Keďže $G(\omega) = F(\omega)$, hodnota konštantnej funkcie sa musí rovnať nule, čo znamená, že funkcia G sa rovná funkcii F. □

Veta 24.9.2. *K funkcii spojitej na nejakom otvorenom intervale existuje na tomto intervale primitívna funkcia.*

Dôkaz. Nech I je otvoreným intervalom a nech f je funkciou spojitou na I.

Definujme na intervale I funkciu F takýmto spôsobom. Najprv začleňme do úvah číslo ω z I. Nech pre ľubovoľné $x \in I$ sú u a v také čísla, že $u \in I$, $v \in I$, $u < v$, $\omega \in (u, v)$ a $x \in (u, v)$. Nech $F_{u,v}$ je takou funkciou spojitou na intervale $\langle u, v\rangle$, že $F_{u,v}(\omega) = 0$ a $\mathrm{D}F_{u,v}(y) = f(y)$ pre každé $y \in (u, v)$. Existencia takejto funkcie $F_{u,v}$ vyplýva z vety 22.9.2. Nech $F(x) = F_{u,v}(x)$.

V ďalšom kroku musíme ukázať, že $F(x)$ nezávisí od voľby u a v. Fakticky, ak aj s a t sú také čísla z intervalu I, že $s < t$, $\omega \in (s, t)$ a $x \in (s, t)$, a zároveň, ak $F_{s,t}$ je funkciou spojitou na $\langle s, t\rangle$, s nulovou hodnotou v ω a deriváciou rovnajúcou sa na (s, t) funkcii f, tak na intervale $\langle u, v\rangle \cap \langle s, t\rangle$ sú obidve funkcie $F_{u,v}$ a $F_{s,t}$ spojité a súčasne majú rovnakú deriváciu. Podľa vety **??**V.8.1 je na intervale $\langle u, v\rangle \cap \langle s, t\rangle$ rozdielom týchto funkcií konštantná funkcia. Keďže obe v bode ω nadobúdajú hodnotu nula, aj konštantná funkcia sa musí rovnať nule. A preto $F_{u,v}(x) = F_{s,t}(x)$.

Funkcia F je teda na I definovaná. Z jej samotnej definície vyplýva, že $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$. $\square$

24.10 Nutná podmienka

Funkcia nemusí byť nutne spojitá na nejakom intervale, aby k nej existovala na tomto intervale primitívna funkcia.

Príklad 24.10.1. *Definujme funkciu F predpisom*

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

pre každé $x \neq 0$ a $F(0) = 0$. Potom je funkcia F diferencovateľná v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$. Vlastne,

$$\mathrm{D}F(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

pre každé $x \neq 0$ a zároveň

$$\mathrm{D}F(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(u) - F(0)}{u - 0} = \lim_{u \to 0} u \sin \frac{1}{u} = 0.$$

Nech $f(x) = \mathrm{D}F(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Takže f je funkciou, ktorá má na $(-\infty, \infty)$ primitívnu funkciu. Ukážeme, že funkcia f nie je spojitá na $(-\infty, \infty)$, čiže nie je spojitou ani v bode 0.

Nech $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a nech $\delta > 0$ je ľubovoľné. Ak $x = \frac{1}{n\pi}$ pre nejaké celé číslo n väčšie než $\frac{1}{n\delta}$, tak $0 < x < \delta$ a platí $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1 \geq \varepsilon$. Takže neplatí, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také δ, že $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ pre každé také x, že $|x - 0| < \delta$. To ale znamená, že funkcia f nie je spojitá v 0. $\Diamond$

V stati o.V6 sme zaviedli pojem množín so strednou hodnotou. Zároveň bolo ukázané, že v skutočnosti ide o intervaly. V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať funkciami so strednou hodnotou.

Funkcia f sa nazýva ***funkcia so strednou hodnotou*** na intervale I, ak pre nejaký interval $J \subset I$ je obor hodnôt funkcie f na J, čiže množina $\{f(x) \colon x \in J\}$, opäť intervalom.

Podľa vety **??**o.X.3.1 je funkcia f funkciou so strednou hodnotou na I práve vtedy, keď k nejakým bodom u, v z I a nejakému bodu y ležiacemu medzi $f(u)$ a $f(v)$ existuje taký bod x medzi u a v, že $y = f(x)$.

Nasledujúce tvrdenie, známe ako Darbouxova veta, hovorí, že strednohodnotovosť funkcie je nutnou podmienkou existencie primitívnej funkcie k funkcii.

Veta 24.10.1. *Funkcia, ku ktorej existuje primitívna funkcia na otvorenom intervale, je funkciou so strednou hodnotou na tomto intervale.*

Dôkaz. Nech F je primitívnou funkciou k funkcii f na otvorenom intervale I. Nech u a v sú také body z intervalu I? že $u < v$. Predpokladajme, že $f(u) < f(v)$. Nech y je také číslo, že $u < x < v$ a $y = f(x)$. V prípade, keď $f(u) > y > f(v)$, možno uvažovať analogicky alebo namiesto funkcie f sa možno zaoberať funkciou $-f$.

Nech $G(z) = F(z) - yz$ pre každé $z \in I$. Potom je funkcia G diferencovateľná a $\mathrm{D}G(z) = f(z) - y$ v každom bode $z \in I$. Z diferencovateľnosti funkcie G vyplýva fakt, že je spojitá na intervale $\langle u, v\rangle$, a teda podľa vety **??**III.5.2 v nejakom bode $x \in \langle u, v\rangle$ nadobúda na intervale $\langle u, v\rangle$ minimálnu hodnotu. Keďže $\mathrm{D}G(u) = f(u) - y < 0$, podľa vety **??**V.2.1 platí $u < x$. Podobne, nerovnosť $x < v$ je splnená, lebo $\mathrm{D}G(v) = f(v) - y > 0$. Čiže $x \in (a, b)$. A teda podľa vety **??**V.2.2 $\mathrm{D}G(x) = 0$, čo znamená, že $f(x) - y = 0$. □

Z Bolzanovej vety **??**III.2.2 je známe, že funkcie spojité na nejakom intervale sú na tomto intervale funkciami so strednou hodnotou. Z vety 22.10.1 v spojení s príkladom 22.10.1 vyplýva, že nie každá funkcia so strednou hodnotou je spojitá.

Obrátené tvrdenie vety 22.10.1 je nepravdivé. Ak je nejaká funkcia funkciou so strednou hodnotou, tak nutne nemusí k nej existovať primitívna funkcia. Takže stredno-hodnotovosť nie je postačujúcou podmienkou existencie primitívnej funkcie. Demonštruje to tento príklad:

Príklad 24.10.2. *Nech g a h sú také funkcie na $(-\infty, \infty)$, že*

$$g(x) = h(x) = \sin\frac{1}{x}$$

pre každé $x \neq 0$, $g(0) = 0$ a $h(0) = 1$.

*Obe funkcie g a h sú funkciami so strednou hodnotou na $(-\infty, \infty)$. Samozrejme, ak J je intervalom, ktorý neobsahuje nulu, tak množina $\{g(x)\colon\ x \in J\} = \{h(x)\colon\ x \in J\}$ je podľa vety **??**III.2.3 intervalom – – vyplýva to z toho, že obe funkcie g a h sú spojité v každom bode okrem 0. Ak interval J obsahuje 0 a zároveň je rôzny od $\langle 0, 0\rangle$, tak platia rovnosti $\{g(x)\colon\ x \in J\} = \{h(x)\colon\ x \in J\} = \langle -1, 1\rangle$. Napokon, ak $J = \langle 0, 0\rangle$ je intervalom obsahujúcim len nulu, tak $\{g(x) : x \in J\} = \{g(0)\} = \langle 0, 0\rangle$ a $\{h(x)\colon\ x \in J\} = \{h(0)\} = \langle 1, 1\rangle$, čiže tieto množiny sú opäť intervalmi.*

Obe funkcie g a h nemôžu mať primitívnu funkciu na $(-\infty, \infty)$. Ak by mali, tak podľa vety 22.2.1 by mala primitívnu funkciu na $(-\infty, \infty)$ aj funkcia $f = g - h$. Podľa vety 22.10.1 to nie je možné, pretože f nie je funkciou so strednou hodnotou ($f(x) = 0$, ak $x \neq 0$, a $f(0) = 1$). ◊

Cvičenia ....

1. *Ak* $f(x) = |\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] - \frac{1}{2}|$ *pre* $x \in (0, 1\rangle$ *a* $f(0) = 0$, *tak* f *je funkciou so strednou hodnotou, ktorá ale nie je spojitá na intervale* $\langle 0, 1\rangle$. *Dokážte to.*
2. *Odôvodnite, že zloženie dvoch funkcií so strednou hodnotou je funkciou so strednou hodnotou.*
3. *Súčet dvoch funkcií so strednou hodnotou nie je nutne funkciou so strednou hodnotou. Nájdite príklad.*
4. *Bez použitia vety 22.10.1 ukážte, že funkcia* f, *určená predpisom* $f(x) = 0$ *pre* $x \neq 0$ *a* $f(0) = 1$, *nemusí mať na intervale* $(-\infty, \infty)$ *primitívnu funkciu.*
5. *Dokážte, že ak* f *je funkciou so strednou hodnotou na intervale* I *a súčasne má limitu sprava v bode* x *z* I, *ktorý nie je pravým koncovým bodom* I, *tak* f *je spojitá sprava v* x. *Obdobne pre spojitosť zľava.*
6. *Ak* f *je funkciou so strednou hodnotou na intervale* I *a zároveň* $y \notin \{f(x)\colon x \in I\}$, *tak* $f(x) > y$ *pre každé* $x \in I$ *alebo* $f(x) < y$ *pre každé* $x \in I$. *Takže funkcia* f *je ohraničená alebo zhora, alebo zdola na* I. *Dokážte to.*
7. *Predpokladajme, že* f *je funkciou so strednou hodnotou na* $\langle a, b\rangle$, $a < b$, *a* k *je také číslo, že* $k \in \{f(x)\colon\ x \in (a, a + \delta)\}$ *pre každé* $\delta > 0$, *a že ku každému* $y \neq k$ *existuje také* $\eta > 0$, *že* $y \notin \{f(x)\colon\ x \in (a, a + \eta)\}$. *Dokážte, že* $k = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
8. *Nech* f *je funkciou so strednou hodnotou na* (a, b) *a súčasne je na tomto intervale ohraničená. Predpokladajme, že ku každému* y *existuje také* $\delta > 0$, *že* $y \notin \{f(x)\colon\ x \in (a, a+\delta)\}$. *Ukážte, že potom existuje* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

24.11 Fakticky primitívne funkcie

Funkcia F sa nazýva ***fakticky primitívna*** k funkcii f na intervale I (ľubovoľného typu), ak je funkcia F spojitá na I a množina bodov, v ktorých rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ neplatí, je spočítateľná.

Spočítateľnou množinou je i prázdna množina. To vedie k tomuto k príkladu:

Príklad 24.11.1. *Ak* I *je otvoreným intervalom a* F *funkciou primitívnou k funkcii* f *na* I, *tak funkcia* F *je fakticky primitívnou k funkcii* f *na intervale* I.

Isteže, pokiaľ je F *diferencovateľnou v každom bode intervalu* I, *tak funkcia* F *je spojitá na* I *a množina bodov* $x \in I$, *v ktorých neplatí rovnosť* $\mathrm{D}F(x) = f(x)$, *je prázdna, čiže spočítateľná.* $\Diamond$

Jedno- či dvojprvková množina je spočítateľná. V rôznych aplikáciách sa často vyskytuje situácia, v ktorej práve takáto množina figuruje. Nasledujúci príklad ju opisuje:

Príklad 24.11.2. *Nech f je daná funkcia a nech F je takou spojitou funkciou na intervale I, že $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každý vnútorný bod x z I. Potom je funkcia F fakticky primitívna k funkcii f na intervale I.*

Podľa predpokladu rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ nemusí platiť jedine v bode $x \in I$, ktorý je koncovým bodom intervalu I. Takže množina takýchto bodov je nanajvýš dvojprvková, a teda spočítateľná. $\Diamond$

Rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ nemusí platiť z viacerých príčin: Bod x nemusí patriť do definičného oboru funkcie f, takže hodnota $f(x)$ nie je definovaná. Funkcia F nemusí byť v x diferencovateľná, čiže nie je definovaná hodnota $\mathrm{D}F(x)$. A samozrejme, obe čísla $\mathrm{D}F(x)$ a $f(x)$ môžu byť definované, no $\mathrm{D}F(x) \neq f(x)$.

Príklad 24.11.3. *Nech $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a nech $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pre každé $x \neq 0$. Potom je funkcia F spojitá na $(-\infty, \infty)$ a rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ neplatí jedine pre $x = 0$. A preto je funkcia F fakticky primitívnou k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.* $\Diamond$

Príklad 24.11.4. *Nech f je charakteristickou funkciou intervalu $\langle 0, \infty)$. Čiže $f(x) = 0$ pre každé $x < 0$ a $f(x) = 1$ pre každé $x \geq 0$. Nech $F(x) = = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Potom je funkcia F fakticky primitívnou k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.*

V skutočnosti je funkcia F spojitá na $(-\infty, \infty)$, $\mathrm{D}F(x) = 0$ pre $x < 0$ a $\mathrm{D}F(x) = 1$ pre $x > 0$. Takže rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ nie je splnená práve vtedy, keď $x = 0$. A to znamená, že množina bodov $x \in (-\infty, \infty)$, v ktorých rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ neplatí má jediný prvok, a teda je spočítateľná. $\Diamond$

Príklad 24.11.5. *Nech f je charakteristickou funkciou jednobodovej množiny $\{0\}$. To znamená, že $f(x) = 0$ pre každé $x \neq 0$ a $f(0) = 1$. Nech $F(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Potom je funkcia F fakticky primitívna k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$, pretože na $(-\infty, \infty)$ je spojitá a množina takých bodov $x \in (-\infty, \infty)$, že $\mathrm{D}F(x \neq f(x))$ má jediný prvok, a to 0.* $\Diamond$

Každá konečná množina je spočítateľná. To vedie k ďalšiemu príkladu:

Príklad 24.11.6. *Podľa vety 22.8.2 ku každej po častiach konštantnej funkcii na kompaktnom intervale I existuje fakticky primitívna funkcia na intervale I.* $\Diamond$

Kľúčová množina smie byť (výnimočne) aj nekonečná.

Príklad 24.11.7. *Nech $S = \{n^{-1} :\ n = 1,\ 2,\ \dots\}$ je množinou prevrátených hodnôt všetkých prirodzených čísel a f jej charakteristickou funkciou.*

To znamená, že $f(x) = 1$ práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo n, pre ktoré platí $x = n^{-1}$, a $f(x) = 0$ pre každý iný bod $x \in (-\infty, \infty)$. Nech $F(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

Funkcia F je potom spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$ a množina bodov, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$, sa rovná práve množine S. Keďže táto množina je spočítateľná, funkcia F je fakticky primitívna k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$. ♢

Fakticky primitívna funkcia je až na aditívnu konštantu práve jedna.

Veta 24.11.1. *Ak F je fakticky primitívna funkcia k funkcii f na intervale I, tak funkcia G je fakticky primitívna k funkcii f na intervale I práve vtedy, keď existuje také číslo c, že $G(x) = F(x) + c$ pre každé $x \in I$.*

Dôkaz. Ak F je fakticky primitívna funkcia k funkcii f na intervale I a $G(x) = F(x) + c$ pre každé $x \in I$, tak funkcia G je spojitá na I. Spojitou je totiž funkcia F a rovnosť $\mathrm{D}G(x) = \mathrm{D}F(x)$ platí v každom bode $x \in I$, v ktorom je funkcia F diferencovateľná. Keďže $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každý s najviac spočítateľne veľa bodov $x \in I$, množina bodov, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}G(x) = f(x)$, je spočítateľná.

Obrátene, nech sú obe funkcie F a G fakticky primitívne k funkcii f na intervale I. Potom sú obidve spojité na I a množina bodov, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}G(x)$, je spočítateľná, pretože je zjednotením množiny bodov $x \in I$, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ neplatí, a množiny bodov $x \in I$, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}G(x) = f(x)$. Podľa vety **??**V.9.1 existuje také číslo c, že $G(x) = F(x) + c$ pre každé $x \in I$. □

Cvičenia

1. *Nech $f(x) = (-1)^{[x]}$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Na intervale $\langle -5, 5 \rangle$ a intervale $(-\infty, \infty)$ nájdite fakticky primitívnu funkciu k funkcii f.*
2. *Nech f je funkcia spojitá na otvorenom intervale I. Dokážte, že funkcia F, fakticky primitívna k funkcii f na intervale I, je primitívnou funkciou k f na I, čiže $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$ bez výnimky.*
3. *Nech $f(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ pre každé $x \neq 0$. Nájdite funkciu fakticky primitívnu k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.*
4. *Existuje funkcia fakticky primitívna ku charakteristickej funkcii množiny všetkých racionálnych čísel alebo množiny všetkých iracionálnych čísel? (Návod: Množina všetkých racionálnych čísel je spočítateľná.)*
5. *Nech $f(x) = 1 - x^2[x^{-2}]$ pre každé $x \neq 0$. Nájdite funkciu fakticky primitívnu k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.*

24.12 Regulované funkcie

Veta 24.12.1. *Nech a a b sú také čísla, že $a < b$ a nech f je regulovanou funkciou na intervale $\langle a, b\rangle$.*

Potom existuje taká postupnosť po častiach konštantných funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $\langle a, b\rangle$, normálne sumovateľná na $\langle a, b\rangle$, že

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{24.35}$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.

Nech $\omega \in \langle a, b\rangle$ a nech F_n je taká fakticky primitívna funkcia k funkcii f, že $F_n(\omega) = 0$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$

Potom je funkcionálna postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ normálne sumovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a súčasne, ak

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \tag{24.36}$$

pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, tak $F(\omega) = 0$ a funkcia F je fakticky primitívna k funkcii f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Dôkaz. Podľa vety **??**III.6.1 ku každému nezápornému číslu n existuje na intervale $\langle a, b\rangle$ taká po častiach konštantná funkcia g_n, že

$$|f(x) - g_n(x)| < 2^{-n}. \tag{24.37}$$

Nech

$$f_n = g_n - g_{n-1} \tag{24.38}$$

pre každé $n = 1, 2, \ldots$ Potom je funkcia f_n po častiach konštantná na $\langle a, b\rangle$ a nerovnosť

$$|f_n(x)| < 3 \cdot 2^{-n}$$

platí pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ a $n = 1, 2, \ldots$ Keďže $\{3 \cdot 2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná postupnosť, funkcionálna postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálne sumovateľná na $\langle a, b\rangle$ a zo vzťahov (22.37) a (22.38) vyplýva, že rovnosť (22.35) platí pre každé $x \in \langle a, b\rangle$.

Nech pre každé $n = 1, 2, \ldots$ je F_n takou funkciou spojitou na $\langle a, b\rangle$, že $f_n(\omega) = 0$ a $\mathrm{D}F_n(x) = f_n(x)$ v každom bode $x \in (a, b)$, pričom f_n je spojitá funkcia. Podľa vety 22.8.2 taká funkcia F_n existuje a podľa vety 22.11.1 je práve jedna. Keďže postupnosť $\{F_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ je sumovateľná, podľa vety **??**V.3.1 je postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ normálne sumovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech je funkcia F definovaná podľa predpisu (22.36) pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Je zrejmé, že potom $F(\omega) = 0$. Podľa vety **??**VI.2.1 je funkcia F spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$. Podľa vety **??**VI.3.1 je rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ splnená pre každý taký bod $x \in \langle a, b\rangle$, že $\mathrm{D}F_n(x) = f_n(x)$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$. A pretože pre každé $n = 1, 2, \ldots$ je množina bodov $x \in (a, b)$, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F_n(x) = f_n(x)$, konečná, množina bodov $x \in (a, b)$, v ktorých nie je splnená rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$, je spočítateľná. □

Veta 24.12.2. *Nech f je regulovanou funkciou na intervale I. Množina bodov $x \in I$, v ktorých funkcia f nie je spojitá, je potom spočítateľná. Navyše, ku každému bodu $\omega \in I$ a každému číslu c práve jedna taká funkcia F, fakticky primitívna k funkcii f na intervale I, že $F(\omega) = c$.*

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že $I = \langle a, b\rangle$, pričom a a b sú také čísla, že $a < b$. Podľa vety 22.12.1 je potom funkcia f súčtom postupnosti po častiach konštantných funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je normálne sumovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech S_n je množinou bodov z intervalu (a, b), v ktorých funkcia f_n nie je spojitá a nech S je zjednotením všetkých množín S_n pre $n = 1, 2, \ldots$ Množina S pozostáva z takých bodov intervalu (a, b), v ktorých najmenej jedna z funkcií f_n, $n = 1, 2, \ldots$, nie je spojitá. Alebo inak, ak bod $x \in (a, b)$ nepatrí do množiny S, tak každá z funkcií f_n, $n = 1, 2, \ldots$, je spojitá v x. Podľa vety **??**VI.2.1 je funkcia f v každom takom bode x spojitá. Podľa vety **??**o.XIII.11.1 je množina S spočítateľná, a to preto, lebo každá z množín S_n, $n = 1, 2, \ldots$, je spočítateľná, dokonca v skutočnosti konečná. A teda množina bodov z intervalu $\langle a, b\rangle$, v ktorých funkcia f nie je spojitá, je naozaj spočítateľná. Ak totiž do množiny S pridáme koncové body a, b, opäť dostaneme spočítateľnú množinu.

Nech je ω bodom z intervalu $\langle a, b\rangle$ a nech c je číslo. Podľa vety 22.12.1 existuje fakticky primitívna funkcia f na $\langle a, b\rangle$, ktorá v ω nadobúda hodnotu 0. Ak k nej pridáme konštantu c, podľa vety 22.11.1 dostaneme práve jednu fakticky primitívnu funkciu f na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorej hodnota v ω sa rovná c.

Ak interval I nie je kompaktný, $\omega \in I$ a c je číslo, tak nech u_n a v_n sú také čísla z intervalu I, že $u_{n+1} \leq u_n \leq \omega \leq v_n \leq v_{n+1}$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$, a súčasne je interval I zjednotením intervalov $\langle u_n, v_n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$

Nech je T_n množinou bodov z intervalu $\langle u_n, v_n\rangle$, v ktorých funkcia f nie je spojitá. Už sme spomínali, že množina T_n je spočítateľná pre každé $n = 1, 2, \ldots$ A keďže množina bodov z intervalu I, v ktorých funkcia F

nie je spojitá, sa rovná zjednoteniu množín T_n, $n = 1, 2, \ldots$, ide tiež o spočítateľnú množinu.

Nech pre každé $n = 1, 2, \ldots$ je F_n takou funkciou fakticky primitívnou k funkcii f na intervale $\langle u_n, v_n \rangle$, že $F_n(\omega) = c$. Keďže podľa vety 22.11.1 je taká funkcia práve jedna, rovnosť $F_m(x) = F_n(x)$ je splnená pre každé $x \in \langle u_n, v_n \rangle$, $n \leq m$. A preto možno funkciu na intervale I jednoznačne definovať, a to takto: ak $x \in I$, tak narábajme s takým prirodzeným číslom n, že $x \in \langle u_n, v_n \rangle$, a súčasne nech $F(x) = F_n(x)$ pre $x \in \langle u_n, v_n \rangle$. Ak $x \in I$, tak hodnota $F(x)$ nezávisí od voľby prirodzeného čísla n. Navyše, funkcia F je spojitá na intervale I a $F(\omega) = c$. Množina U, pozostávajúca z bodov $x \in I$, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F(x) = f(x)$, je zjednotením množín U_n, čiže množín bodov $x \in \langle u_n, v_n \rangle$, v ktorých neplatí rovnosť $\mathrm{D}F_n(x) = f(x)$. Keďže každá množina U_n, $n = 1, 2, \ldots$, je spočítateľná, aj množina U je spočítateľná. To však znamená, že funkcia F je fakticky primitívna k funkcii f na intervale I. Jej jedinečnosť vyplýva z vety 22.11.1. $\square$

Igor Kluvánek

INTEGRÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

tretí diel

Vydala
Pedagogická fakulta
Katolíckej univerzity
v Ružomberku

Ružomberok 2008

Z pripravených predlôh vytlačilo
MTM Levoča

ISBN 978-80-8084-236-9