22 | Diferenciál funkcie

22.1 Diferenciál funkcie

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode x, tak lineárna funkcia l definovaná predpisom

$$l(u) = (\mathrm{D}f(x))u \tag{22.1}$$

pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ sa nazýva ***diferenciál funkcie f v bode*** x. Označuje sa $\mathrm{d}f(x)$.

Zdôraznime, že $\mathrm{d}f(x)$ neoznačuje číslo, ale takú funkciu l, že (22.1) platí pre každé u. Hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f(x)$ v bode $u \in (-\infty, \infty)$ sa označuje $\mathrm{d}f(x)(u)$ alebo $\mathrm{d}f(x; u)$.

Niektorí autori označujú diferenciál funkcie f v bode x ako $\mathrm{d}_x f$ či $\mathrm{d}f_x$.

Ak funkcia f nie je v bode x diferencovateľná, tak diferenciál funkcie f v bode x nie je definovaný.

Príklad 22.1.1. *Nech $f(x) = x^3$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Diferenciálom funkcie f v bode 2 je taká funkcia l, že $l(u) = 12u$ pre každé $u \in (-\infty, \infty)$. Čiže pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ platí*

$$\mathrm{d}f(2)(u) = 12u\,. \qquad \Diamond$$

Príklad 22.1.2. *Nech $f(x) = |x - 2|$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. V tomto prípade funkcia f diferenciál v bode 2 nemá, pretože nie je v bode 2 diferencovateľná. Takže symbol „$\mathrm{d}f(2)$“ nemá zmysel.* $\Diamond$

Keďže diferenciál $\mathrm{d}f(x)$ funkcie f v bode x je bez výnimky určený deriváciou $\mathrm{D}f(x)$ funkcie f v x, v jednorozmernom diferenciálnom počte (takom, akým sa zaoberáme aj my) sa zvyčajne oveľa viac uprednostňuje pred diferenciálom práve derivácia.

Definíciu diferencovateľnosti však možno nanovo sformulovať aj prostredníctvom pojmu diferenciálu.

Veta 22.1.1. *Funkcia f je diferencovateľná v bode x práve vtedy, keď existuje taká lineárna funkcia l, že*

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)-l(u)}{u}=0\,. \tag{22.2}$$

Ak l je takou lineárnou funkciou, že platí (22.2), *tak* $\mathrm{d}f(x)=l$.

Dôkaz. Podľa vety **??** je funkcia f je diferencovateľná v x a súčasne $\lambda = \mathrm{D}f(x)$ práve vtedy, keď

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{f(x+u)-f(x)}{u}-\lambda\right)=\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)-\lambda u}{u}=0\,.$$

Ak označíme $l(u)=\lambda u$ pre každé u, tak funkcia f je diferencovateľná v x a $\mathrm{d}f(x)=l$ práve vtedy, keď platí (22.2). □

Uvedené tvrdenie de facto hovorí, že ak $l = \mathrm{d}f(x)$, tak hodnoty $l(u)$ veľmi dobre aproximujú prírastok $f(x+u)-f(x)$ funkcie f pre u z blízkeho okolia 0. Malou nie je iba absolútna hodnota rozdielu

$$f(x+u)-f(x)-l(u)\,,$$

ale tento rozdiel je malým aj v porovnaní s u z blízkeho okolia 0. Takže pre u z blízkeho okolia nuly funkcia

$$u\mapsto f(x)+\mathrm{d}f(x)(u)$$

veľmi dobre aproximuje funkciu

$$u\mapsto f(x+u)\,.$$

Ak f je daná funkcia, tak funkcia $\mathrm{d}f$ definovaná na množine všetkých bodov, v ktorých je funkcia f diferencovateľná, pričom súčasne je hodnota $\mathrm{d}f(x)$ v každom z týcho bodov x diferenciálom f v x, sa nazýva ***diferenciál funkcie*** f.

Poznamenajme, že hodnotami diferenciálu $\mathrm{d}f$ nie sú čísla, ale lineárne formy (lineárne funkcie).

Príklad 22.1.3. *Ak $f(x)=x^2+3x^5$, tak hodnota $\mathrm{d}f(x)$ diferenciálu $\mathrm{d}f$ funkcie f v bode $x\in(-\infty,\infty)$ je lineárnou formou $u\mapsto(2x+15x^4)u$, $u\in(-\infty,\infty)$.* ◊

Funkcia, ktorej hodnotami sú lineárne formy, sa nazýva ***diferenciálna forma***.

Najdôležitejšími príkladmi diferenciálnych foriem sú práve diferenciály funkcií.

Vo všeobecnosti, súčin $\Phi = g\mathrm{d}h$ funkcie g (ktorej funkčnými hodnotami sú čísla) a diferenciálu $\mathrm{d}h$ funkcie h je diferenciálnou formou na množine M, ak je funkcia g definovaná v každom bode množiny M (ktorá je časťou definičného oboru g) a súčasne funkcia h je diferencovateľná v každom bode množiny M. Hodnota $\Phi(x)$ diferenciálnej formy Φ v nejakom bode $x \in M$ je potom lineárnou formou $g(x)\mathrm{d}h(x)$, čiže funkcia $u \mapsto g(x)\mathrm{d}h(x) = g(x)\mathrm{D}h(x)u$, $u \in (-\infty, \infty)$.

Príklad 22.1.4. *Nech*

$$g = \sqrt{6 + x - x^2} \quad \text{a} \quad h = \sqrt[3]{2 + x - x^2}\,.$$

Definičným oborom funkcie g je množina všetkých takých čísel x, že $6+x-x^2 \geq 0$, teda interval $\langle -2, 3\rangle$. Funkcia h je diferencovateľná v každom bode reálnej priamky s výnimkou -1 a 2. Ak $x \neq -1$ a súčasne $x \neq 2$, tak

$$\mathrm{D}h(x) = \frac{1 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(2 + x - x^2)^2}}$$

pre každé $x \in \langle -2, 3\rangle$ okrem -1 a 2. Takže $M = \langle -2, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 3\rangle$. A teda, ak $x \in M$, tak

$$\Phi(x)(u) = g(x)\mathrm{d}h(x)(u) = g(x)\mathrm{D}h(x)(u) = \frac{(2x - 1)\sqrt{6 + x - x^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{(2 + x - x^2)^2}}$$

pre každé $u \in (-\infty, \infty)$. Napríklad, $\Phi(1) = l$, pričom l je takou lineárnou funkciou, že pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ platí

$$l(u) = \frac{\sqrt{6}}{3 \cdot \sqrt[3]{4}}\, u\,. \qquad \Diamond$$

Príklad 22.1.5. *Nech*

$$g = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{16 + (\sqrt[3]{x})^2}} \quad \text{a} \quad h = \sqrt[3]{x}\,.$$

Definičným oborom diferenciálnej formy $\Phi = g\mathrm{d}h$ je množina nenulových čísel, pretože definičným oborom funkcie g je $(-\infty, \infty)$ a funkcia h je diferencovateľná v každom bode okrem 0. Navyše, pre každé $x \neq 0$ platí $\Phi(x) = g(x)\mathrm{d}h(x)$. Čiže

$$\Phi(x)(u) = g(x)\mathrm{D}h(x)(u) = g(x)\mathrm{D}h(x)(u) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{16+(\sqrt[3]{x})^2}}\,\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\,u = \frac{u}{3\cdot\sqrt[3]{x}\sqrt{16+(\sqrt[3]{x})^2}}$$

pre každé $u \in (-\infty, \infty)$. Napríklad, $\Phi(27) = l$, pričom l je takou lineárnou funkciou, že pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ platí

$$l(u) = \frac{u}{45}\ . \qquad \Diamond$$

Príklad 22.1.6. $\mathrm{d}f = (\mathrm{D}f)\mathrm{d}x$ *pre nejakú funkciu f.* $\Diamond$

Veta 22.1.2. *Nech f, g a h sú funkcie. Potom*

$$\mathrm{d}f = g\mathrm{d}h$$

vtedy a len vtedy, keď

$$\mathrm{D}f = g\mathrm{D}h\ .$$

Dôkaz. Platnosť tvrdenia vyplýva priamo z definície. $\square$

Príklad 22.1.7. *Nech*

$$f = \ln\sqrt{1+x^2}, \qquad g = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{a} \qquad h = \frac{1}{2}\,x^2\ .$$

Potom $\mathrm{d}f = g\mathrm{d}h$. Definičným oborom diferenciálu $\mathrm{d}f$ je $(-\infty, \infty)$. $\Diamond$

Ak je funkcia f dvakrát diferencovateľná v bode x, tak kvadratická forma q určená predpisom $q(u) = \mathrm{D}^2 f(x)u^2$ pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ sa nazýva ***diferenciál druhého rádu funkcie*** f ***v bode*** x. Označuje sa $\mathrm{d}^2 f(x)$. Takže pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\mathrm{d}^2 f(x)(u) = \mathrm{D}^2 f(x)u^2\ .$$

Príklad 22.1.8. *Ak $f = x^3 - 2x^2$ a súčasne $x \in (-\infty, \infty)$, tak $\mathrm{d}^2 f(x)(u) = (6x-4)u^2$ pre každé $u \in (-\infty, \infty)$.* $\Diamond$

Funkcia $\mathrm{D}^2 f$, definovaná na množine všetkých bodov, v ktorej je dvakrát diferencovateľná, pričom jej funkčná hodnota $\mathrm{D}^2 f(x)$ v každom z takýchto bodov x je deriváciou druhého rádu funkcie f v x, sa nazýva ***derivácia druhého rádu funkcie*** f.

Funkcia $\mathrm{d}^2 f$, definovaná na množine všetkých bodov, v ktorej je dvakrát diferencovateľná, pričom jej funkčná hodnota $\mathrm{D}^2 f(x)$ v každom z takýchto bodov x je diferenciálom druhého rádu funkcie f v x, sa nazýva ***diferenciál druhého rádu funkcie*** f.

Poznamenajme, že hodnoty diferenciálu $\mathrm{d}^2 f$ druhého rádu funkcie f nie sú čísla, ale kvadratické formy (homogénne kvadratické funkcie).

22.2 Derivácia podľa funkcie

Ak chceme vyjadriť skutočnosť, že definičným oborom funkcie f je nejaká množina reálnych čísel, tak povieme, že f je funkciou reálnej premennej alebo funkciou jednej reálnej premennej. V predchádzajúcom texte sme dosiaľ túto frázu často nepoužívali, pretože to nebolo potrebné – prakticky všetky funkcie, ktorými sme sa zaoberali, boli funkciami reálnej premennej. V nasledujúcich statiach horizont nášho záujmu rozšírime o funkcie s definičným oborom, ktorý nutne pozostáva z reálnych čísel. A preto bude používanie spomínaného slovného spojenia užitočné.

Nie je príliš náročné zistiť, odkiaľ táto fráza pochádza. Reálnou premennou sa rozumie identická funkcia x na $\mathbb{R}$. Ak f je funkciou, ktorej definičným oborom je nejaká množina reálnych čísel, tak vždy možno písať $f = f(x)$, pričom $f(x)$ je zaiste zloženou funkciou x a f, čo možno (skôr výnimočne) zapísať ako $f \circ x$.

Nech ξ je reálnym číslom a f funkciou reálnej premennej, diferencovateľnej ξ. Derivácia $\mathrm{D}f(\xi)$ funkcie f v čísle ξ sa zavše nazýva derivácia f podľa x v ξ. Označuje sa $\mathrm{D}_x f(\xi)$ alebo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,(\xi)\,.$$

Odôvodnenie takéhoto prístupu sa čoskoro ukáže. Zatiaľ azda postačí uviesť, že deriváciami funkcie f v ξ je možné zaoberať sa nielen nutne podľa x, ale aj podľa iných funkcií. Navyše, o derivácii funkcie f podľa funkcie h zrejme možno v tomto kontexte hovoriť aj vtedy, keď f a h nie sú funkciami reálnej premennej.

Pojem derivácie funkcie podľa nejakej funkcie bol prinajmenšom implicitne uplatnený už pri budovaní samotných základov diferenciálneho a integrálneho počtu, osobitne v riešeniach problémov z prírodovedy.

Nech Ω je neprázdna množina. Zavše sa označuje ako priestor či priestor stavov. Jej prvky sa nazývajú body alebo stavy.

Nech h je funkciou, ktorej definičným oborom M je podmnožina Ω.

Nech ξ je bodom, ktorý patrí do M. Nech $y = h(\xi)$ je hodnotou funkcie h v bode ξ. Predpokladajme, že existuje taký otvorený interval V, že

$$y \in V \subset h(M) = \{h(\omega) :\ \omega \in M\}\,.$$

Možno teda napísať, že hodnota y funkcie h v ξ má okolie V, ktoré je celé obsiahnuté v obore hodnôt funkcie h. Nech f je funkcia, ktorej definičným oborom je podmnožina Ω.

Funkcia f sa nazýva ***diferencovateľná podľa funkcie*** h ***v bode*** ξ, ak existuje taká funkcia F reálnej premennej, diferencovateľná v čísle y, že

$$f(\omega) = F(h(\omega)) \tag{22.3}$$

pre každé také $\omega \in M$, že $h(\omega) \in V$. Číslo $\mathrm{D}F(y) = \mathrm{D}F(h(\xi))$ sa potom nazýva ***derivácia funkcie*** f ***podľa funkcie*** h ***v bode*** ξ. Označuje sa $\mathrm{D}_h f(\xi)$ alebo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\,(\xi)\,. \tag{22.4}$$

Čiže

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\,(\xi) = \mathrm{D}_h f(\xi) = \mathrm{D}F(y)\,.$$

Príklad 22.2.1. *Nech* $\Omega = \mathbb{R}$. *Nech* $f = x^2 + 3x^{10}$ *a* $h = x^2$. *Ukážme, že funkcia* f *je diferencovateľná podľa funkcie* h *v každom bode* $\xi \neq 0$ *a vypočítajme deriváciu* f *podľa* h *v takomto bode.*

Riešenie: V uvedenom prípade je definičným oborom funkcie h interval $M = (-\infty, \infty)$. Nech $\xi \neq 0$. Interval $V = (0, \infty)$ je potom okolím hodnoty $h(\xi) = \xi^2$ a súčasne podmnožinou množiny $\{h(\omega) :\ \omega \in M\} = \langle 0, \infty)$, čiže oboru hodnôt funkcie h. Nech

$$F(y) = y + 3y^5$$

pre každé $y \in (-\infty, \infty)$. Potom

$$f(\omega) = \omega^2 + 3\omega^{10} = F(h(\omega))$$

pre každé také $\omega \in M$, že $h(\omega) \in V$, a teda pre každé $\omega \neq 0$, pretože uvedená rovnosť v skutočnosti platí bez výnimky pre každé $\omega \in (-\infty, \infty)$. Funkcia F je diferencovateľná v každom bode z $(-\infty, \infty)$, pričom

$$\mathrm{D}F(y) = 1 + 15y^4$$

pre každé $y \in (-\infty, \infty)$. Osobitne, F je diferencovateľná v $y = \xi^2$, a preto je funkcia f diferencovateľná podľa h v ξ a platí

$$\mathrm{D}_h f(\xi) = \mathrm{D}F(h(\xi)) = 1 + 15(h(\xi))^4 = 1 + 15\xi^8\,.$$

Keďže okolie hodnoty $h(0) = 0$ (t. j. hodnoty h v 0), ktoré by bolo podmnožinou oboru hodnôt funkcie h, čiže intervalu $\langle 0, \infty)$, neexistuje, žiadna funkcia nie je podľa h v 0 diferencovateľná. $\Diamond$

Príklad 22.2.2. *Nech $\Omega = \mathbb{R}$. Derivácia funkcie f podľa identickej funkcie x je elementárnou deriváciou funkcie f. Teda $\mathrm{D}_x f = \mathrm{D} f$.*

Vyplýva to zo skutočnosti, že ak $h = x$ a $f(\omega) = F(h(\omega))$ pre nejaké ω, tak $F(\omega) = f(\omega)$, pretože $h(\omega) = \omega$. Takže vo vzťahu 22.1 platí $F = f$. $\Diamond$

Funkcia, definovaná na množine všetkých bodov Ω, v ktorých je funkcia f diferencovateľná podľa funkcie h, pričom jej hodnota v takomto bode ξ sa rovná derivácii $\mathrm{D}_h f(\xi)$ funkcie f podľa h v ξ, sa nazýva ***derivácia funkcie*** f ***podľa*** h. Označuje sa $\mathrm{D}_h f$ alebo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} . \tag{22.5}$$

Príklad 22.2.3. *Nech $\Omega = \mathbb{R}$ a súčasne*

$$f = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + x - 1 \quad \text{a} \quad h = \frac{1}{x-1} .$$

Nájdime deriváciu funkcie f podľa h.

Riešenie: Ak pre každé $y \neq 0$ platí

$$F(y) = y^2 + y + \frac{1}{y} ,$$

tak pre každé $\omega \neq 1$

$$f(\omega) = F(h(\omega)) .$$

Keďže funkcia F je diferencovateľná v každom $y \neq 0$, pričom

$$\mathrm{D}F(y) = 2y + 1 - \frac{1}{y^2}$$

pre každé $y \neq 0$, funkcia f je v každom bode okrem 1 diferencovateľná podľa funkcie h. Definičným oborom jej derivácie $\mathrm{D}_h f$ podľa h je množina $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ a súčasne pre každé $\xi \neq 1$

$$\mathrm{D}_h f(\xi) = \mathrm{D}F(h(\xi)) =$$

$$= 2h(\xi) + 1 - \frac{1}{(h(\xi))^2} = \frac{2}{\xi - 1} + 1 - (\xi - 1)^2 = \frac{2}{\xi - 1} - \xi^2 + 2\xi$$

Čiže

$$\mathrm{D}_h f = \frac{2}{x-1} - x^2 + 2x . \qquad \Diamond$$

Z nasledujúceho tvrdenia ako dôsledku pravidla pre derivovanie zloženej funkcie vyplýva, že $\mathrm{D}_h f(\xi)$ možno často vyjadriť ako podiel $\mathrm{D}f(\xi)$ a $\mathrm{D}h(\xi)$.

Veta 22.2.1. *Nech $\Omega = \mathbb{R}$. Nech funkcia h je diferencovateľná v bode $\xi \in \Omega$ a nech funkcia f je diferencovateľná podľa funkcie h v ξ. Funkcia f je potom diferencovateľná v ξ, pričom*

$$\mathrm{D}f(\xi) = \mathrm{D}_h f(\xi)\mathrm{D}h(\xi)\ .$$

Dôkaz. Podľa predpokladu existuje okolie V hodnoty $h(\xi)$ a taká funkcia F, diferencovateľná v $h(\xi)$, že $f(\omega) = F(h(\omega))$ pre každé ω z definičného oboru funkcie h, pre ktoré $h(\omega) \in V$. Keďže h je diferencovateľná v ξ, podľa vety **??**??? existuje také okolie U bodu ξ, že $h(\omega) \in V$ pre každé $\omega \in U$. A preto pre každé $\omega \in U$ platí $f(\omega) = F(h(\omega))$. Podľa vety **??**?? je funkcia f diferencovateľná v ξ a súčasne $\mathrm{D}f(\xi) = \mathrm{D}F(h(\xi))\mathrm{D}h(\xi) = \mathrm{D}_h f(\xi)\mathrm{D}h(\xi)$. □

A teda, ak h je taká funkcia, že $\mathrm{D}h(\xi) \neq 0$ a funkcia f je diferencovateľná podľa h v ξ, tak

$$\mathrm{D}_h f(\xi) = \frac{\mathrm{D}f(\xi)}{\mathrm{D}h(\xi)}\ .$$

Príklad 22.2.4. *Nech f a h sú funkciami z príkladu 22.2.4. V jeho texte sme sa tiež zmienili, že funkcia f je diferencovateľná podľa h v bode $\xi \neq 0$, pričom pre každé $\xi \in \Omega = \mathbb{R}$ platí $\mathrm{D}f(\xi) = 2\xi + 30\xi^9$ a $\mathrm{D}h(\xi) = 2\xi$. Z vety 22.2.1 vyplýva, že pre každé $\xi \neq 0$ platí*

$$\mathrm{D}_h f(\xi) = \frac{\mathrm{D}f(\xi)}{\mathrm{D}h(\xi)} = \frac{2\xi + 30\xi^9}{2\xi} = 1 + 15\xi^8\ . \qquad \diamond$$

V situácii vzťahujúcej sa na vetu 22.2.1 pre každé $u \in (-\infty, \infty)$ platí rovnosť

$$\mathrm{d}f(\xi)(u) = \mathrm{D}_h f(\xi)\mathrm{d}h(\xi)(u)\ ,$$

pretože $\mathrm{d}f(\xi)(u) = \mathrm{D}f(\xi)u = \mathrm{D}h(\xi)u$. A teda, ak $\mathrm{D}h(\xi) \neq 0$, tak pre $u \neq 0$

$$\mathrm{D}_h f(\xi) = \frac{\mathrm{d}f(\xi)(u)}{\mathrm{d}h(\xi)(u)}\ . \tag{22.6}$$

Samozrejme, existuje úzke spojenie medzi označením (22.4) i (22.5) a rovnosťou (22.6). Pôvodne bolo označenie (22.5) zavedené G. W. Leibnizom.

Je nutné zdôrazniť, že zápis (22.6) možno použiť len vtedy, keď f a h sú funkcie reálnej premennej a $\mathrm{D}h(\xi) \neq 0$, zatiaľ čo označenie (22.4) i (22.5) sa vzťahuje na funkcie f a h s ľubovoľným definičným oborom pre ľubovoľný bod ξ, v ktorom je f diferencovateľná podľa h. V dôsledku toho je nutné (22.5) vnímať ako celok a nezaobchádzať s ním ako so zlomkom, ktorého čitateľom je $\mathrm{d}f$ a menovateľom $\mathrm{d}h$. Na tento fakt poukazuje označovanie hodnôt derivácie (22.5) vo forme (22.4) oveľa viac než v podobe

$$\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}h}\,. \tag{22.7}$$

Napriek tomu, niektorí autori namiesto (22.4) používajú práve (22.7), pretože (22.4) sa im zdá o čosi ťažkopádnejšie. Prinajmenšom, označenie (22.5) je veľmi univerzálne a dvojzmyselné vo výpočtoch, ktoré nevyžadujú časté narábanie s hodnotami derivácií. Táto dvojzmyselnosť sa vo väčšej miere ukáže v stati 22.4 po zavedení pravidiel počítania s deriváciami.

Ak je funkcia h na svojom definičnom obore M prostá, tak bod $\xi \in M$ je jednoznačne určený hodnotou $y = h(\xi)$ funkcie h v ξ. V tomto prípade sa hodnota derivácie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}$ v ξ zavše označuje

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}\right|_{h=y}\,.$$

Všetky uvedené dohovory a označenia sa osobitne vzťahujú aj na situáciu, keď $h = x$ je identickou funkciou na $\mathbb{R}$. Vzhľadom na to, že derivácia $\mathrm{D}f$ funkcie f sa rovná derivácii $\mathrm{D}_x f$ funkcie f podľa identickej funkcie, platí

$$\mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,.$$

Cvičenia . . . .

1. *Vypočítajte* $\mathrm{D}_h f$, *ak*
   a) $f = x^0 + 5x^4 - 19x^6$ *a* $h = x^2$;
   b) $f = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ *a* $h = x^2$;
   c) $f = \left(\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2})\right)^{-1}$ *a* $h = x^2$;
   d) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = \sqrt{x}$;
   e) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = x$;
   f) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = x^2$.

22.3 Príklady

Uvažujme o situácii z predchádzajúcej state. Je teda daný priestor Ω, funkcia h definovaná na podmnožine M množiny Ω a bod ξ z M, ku ktorému existuje taký otvorený interval V, že $f(\xi) \in V \subset \{f(\omega) :\ \omega \in M\}$. Označme $y = h(\xi)$.

Okrem toho, nech f je funkcia diferencovateľná podľa h v ξ. (Definičným oborom funkcie f je samozrejme podmnožina množiny Ω.) Vzhľadom na definíciu to znamená, že existuje taká funkcia F reálnej premennej, diferencovateľná v y, a také okolie V bodu y, že $f(\omega) = F(h(\omega))$ pre každé ω, spĺňajúce podmienku $h(\omega) \in V$.

Pretože funkcia F je diferencovateľná v y, existuje taká funkcia ϕ, spojitá v 0, že $\phi(0) = \mathrm{D}F(y)$ a súčasne

$$F(y + v) - F(y) = \phi(v)v$$

pre každé číslo v z okolia 0. Zhruba vyjadrené, ak $v \neq 0$ je blízko k 0, tak

$$\phi(v) = \frac{F(y + v) - F(y)}{v}$$

je blízko k $\mathrm{D}F(y)$. Keďže $\mathrm{D}_h f(\xi) = \mathrm{D}F(y)$, voľbou $v = h(\omega) - h(\xi)$ sa získa takéto tvrdenie:

Ak rozdiel $h(\omega) - h(\xi)$ je blízko k 0, ale nule sa nerovná, tak zlomok

$$\frac{f(\omega) - f(\xi)}{h(\omega) - h(\xi)} \tag{22.8}$$

je blízko k derivácii $\mathrm{D}_h f(\xi)$ funkcie f podľa funkcie h v bode ξ.

Oveľa vhodnejšie by bolo vyjadriť to formuláciou, že zlomok (22.8) možno vhodnou voľbou bodu ω ľubovoľne priblížiť k $\mathrm{D}_h f(\xi)$ tak, že rozdiel $h(\omega) - h(\xi)$ je s dostatočne blízko k 0, súčasne však nenulový. Posledná podmienka vlastne znamená, že $h(\omega)$ by mala byť s požadovanou mierou blízko k $h(\xi)$ a zároveň od tejto hodnoty rôzna.

Isteže, všetky nejasnosti možno odstrániť formuláciou, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že

$$\left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}(\xi) - \frac{f(\omega) - f(\xi)}{h(\omega) - h(\xi)} \right| < \varepsilon$$

pre každé také ω, že $h(\omega) \in V$ a zároveň $0 < |h(\omega) - h(\xi)| < \delta$.

Takže deriváciu $\mathrm{D}_h f(\xi)$ funkcie f podľa funkcie h v bode ξ možno interpretovať ako rýchlosť (mieru) zmeny (kvantitívne reprezentovanej) funkcie f vzhľadom na (kvantitatívne reprezentovanú) funkciu h presne v bode ξ.

Interpretácia derivácie ako rýchlosti zmeny sa zrkadlí v označovaní (22.5).

Príklad 22.3.1. *(**Gradienty.**) Nech Ω je (v geometrickom zmysle) priamkou. Predpokladajme, že je na tejto priamke je zvolený súradnicový systém. Voľba súradnicového systému zahŕňa spolu s ostatnými náležitosťami tiež voľbu jednotkovej dĺžky.*

Súradnicový systém určuje a zároveň je určený súradnicovou funkciou x na Ω, krátko označovanou ako súradnica. Hodnota $x(\omega)$ tejto funkcie v nejakom bode $\omega \in \Omega$ je súradnicou bodu ω vo zvolenom súradnicovom systéme.

Nech f je funkcia definovaná na časti Ω s určitým fyzikálnym či iným významom. Derivácia

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi)$$

*funkcie f podľa súradnice x v bode ξ sa nazýva **gradient funkcie** f **v** ξ. Predstavuje rýchlosť zmeny (kvantitatívne reprezentovanej) funkcie f vzhľadom na súradnicu v ξ.*

Napríklad, nech je definičným oborom M funkcie f úsečka danej priamky reprezentujúca množinu bodov tenkej ťažkej tyče. Nech teplotu tyče, ktorá nie je v každom jej bode rovnaká, opisuje funkcia f. Čiže vo zvolených jednotkách sa teplota tyče v nejakom bode $\omega \in M$ rovná $f(\omega)$. Derivácia funkcie f podľa súradnice v bode $\xi \in M$ je teplotným gradientom tyče v ξ. Ak $\omega \neq \xi$ je bodom z M, ktorého súradnica sa príliš nelíši od bodu ξ, tak gradient f v ξ sa približne rovná

$$\frac{f(\omega) - f(\xi)}{x(\omega) - x(\xi)}\,.$$

Ak sa vzdialenosť meria v metroch a teplota v kelvinoch, tak teplotný gradient sa vyjadruje kelvinoch na meter, t. j. K/m.

Príklad 22.3.2. *(**Rýchlosť a zrýchlenie.**) Predpokladajme, že je zvolený referenčný časový okamih, označovaný ako nulový čas, a jednotka (dĺžky) času. Takto je vlastne definovaná na množine Ω všetkých časových okamihov minulosti, prítomnosti a budúcnosti **časovo-súradnicová funkcia** t, krátko označovaná ako **čas**. S každým časovým okamihom τ je potom združené číslo $t(\tau)$, ktoré sa nazýva časová súradnica okamihu τ. Ak je predmetom úvah časový okamih τ, ktorý nastal pred nulovým časom, tak $t(\tau)$ sa rovná mínus dĺžka časového intervalu (doba), uplynutého od τ do nulového času. Ak ide o časový okamih, nastávajúci po nulovom čase, tak $t(\tau)$ sa rovná dĺžke doby od nulového času do okamihu τ. Časová súradnica nulového času sa rovná nule.*

Nech T je časový interval. Čiže $T \subset \Omega$ je množinou časových okamihov τ, ktorých časová súradnica $t(\tau)$ patrí do nejakého časového intervalu I.

Nech s je funkcia definovaná na T, opisujúca priamočiary pohyb častice. To znamená, že súradnicový systém je fixovaný na priamke a hodnota $s(\tau)$ funkcie s je súradnicou polohy častice v nejakom časovom okamihu $\tau \in T$.

Ak je funkcia s diferencovateľná podľa časovo-súradnicovej funkcie t v časovom okamihu $\tau \in T$, tak v tomto okamihu τ má častica rýchlosť rovnajúcu sa

$$v(\tau) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(\tau)\ .$$

Ak je jednotkou času sekunda a jednotkou dĺžky meter (pri meraní prostredníctvom súradníc na priamke), tak rýchlosť je určená v metroch za sekundu (m/s).

Ak funkcia

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

opisujúca rýchlosť častice, je diferencovateľná podľa času t v okamihu τ, tak v tomto okamihu sa zrýchlenie častice rovná

$$a(\tau) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(\tau)\ .$$

Ak je jednotkou času sekunda a jednotkou dĺžky meter, tak zrýchlenie je určené v metroch za sekundu na druhú (m/s^2).

Uvažujme o osobitnej situácii, v ktorej sa častica pohybuje s konštantným zrýchlením. V tomto prípade existujú také konštanty α, β a γ, že

$$s = \frac{1}{2}\,\alpha t^2 + \beta t + \gamma\ ,$$

a teda

$$s(\tau) = \frac{1}{2}\,\alpha t^2(\tau) + \beta t(\tau) + \gamma$$

pre každé $\tau \in T$. Konštanta γ je určená v jednotkách dĺžky, β v jednotkách rýchlosti a α v jednotkách zrýchlenia. Z toho vyplýva, že

$$v(\tau) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(\tau) = \alpha t(\tau) + \beta \quad \text{a} \quad a(\tau) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = \alpha$$

pre každý vnútorný okamih τ intervalu T, čiže pre každý taký okamih τ, že $t(\tau)$ je vnútorným bodom intervalu I.

Príklad 22.3.3. *(**Objem a tlak.**) Nech Ω je množinou možných stavov určitého množstva plynu ohraničeného vo valci s pohyblivým piestom, udržiavaného v nemeniacej sa teplote. Nech $V(\omega)$ je objemom a $P(\omega)$ tlakom tohto plynu v stave $\omega \in \Omega$. Derivácia*

$$\mathrm{D}_V P(\omega) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}(\omega)$$

funkcie P podľa V v stave ω predstavuje rýchlosť zmeny tlaku plynu v závislosti od objemu. Ak sa stav ω zmení na iný tak, že v novom stave je objem plynu blízko k hodnote $V(\omega)$, tak $\mathrm{D}_V P(\omega)$ sa približne rovná podielu rozdielu tlakov a rozdielu objemov v týchto stavoch.

Uvažujme o situácii s ideálnym plynom. Existuje taká konštanta K, závisiaca od druhu, množstva a teploty plynu, určená v jednotkách energie, že $P(\omega)V(\omega) = K$ pre každé $\omega \in \Omega$. Čiže

$$P = \frac{K}{V}\,.$$

Z toho vyplýva, že pre každý stav ω platí

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}(\omega) = -\frac{K}{V^2(\omega)} \quad \text{alebo} \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = -\frac{K}{V^2}\,.$$

***Príklad 22.3.4.** (**Cena, dopyt a príjem.**)* Cena komodity (pšenice, skrutiek, vypínačov, gumy, analgetík, sódy bikarbóny atď.) závisí od stavu ekonomiky. Nech Ω je množinou možných stavov ekonomiky určitého regiónu. Nech pre každé ω predstavuje $p(\omega)$ cenu určitej komodity, ak sa ekonomika nachádza v stave ω.

Dopytom po komodite je množstvo komodity (vo vhodných jednotkách) požadované počas určitého časového obdobia od výrobcu alebo od všetkých výrobcov komodity. Dopyt závisí od stavu ekonomiky. Nech pre každé $\omega \in \Omega$ je dopytom po predmetnej komodite $f(\omega)$.

Derivácia

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}(\omega)$$

funkcie dopytu f podľa funkcie ceny p v ω sa nazýva **marginálny dopyt** po predmetnej komodite v ekonomike nachádzajúcej sa v stave ω.

Predpokladajme, že dopyt sa vzťahuje k určitému výrobcovi predmetnej komodity. Potom je

$$R = f\,p$$

príjmovou funkciou výrobcu. Teda, ak sa ekonomika nachádza v stave ω, tak príjem výrobcu pochádzajúci z výroby a predaja predmetnej komodity v istom časovom období je $R(\omega)$.

Derivácia

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}f}(\omega)$$

príjmu R podľa dopytu f v ω sa nazýva **marginálny príjem** výrobcu v ekonomike nachádzajúcej sa v stave ω.

Príklad 22.3.5. *(**Rezistory.**) Nech Ω je množinou možných stavov rezistora. Pre každé $\omega \in \Omega$ je jednoznačne určený elektrický prúd $i(\omega)$ prechádzajúci rezistorom a rozdiel potenciálov $v(\omega)$ medzi svorkami rezistora.*

Derivácia

$$R(\omega) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}i}(\omega)$$

*rozdielu potenciálov v podľa prúdu i v ω sa nazýva **odpor rezistora** v stave ω. Ak je rozdiel potenciálov určený vo voltoch a prúd v ampéroch, odpor je určený v ohmoch.*

Derivácia

$$G(\omega) = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}v}(\omega)$$

*prúdu podľa rozdielu potenciálov v ω sa nazýva **vodivosť rezistora** v stave ω. Ak je rozdiel potenciálov určený vo voltoch a prúd v ampéroch, vodivosť je určená v siemensoch.*

Cvičenia

1. *Predpokladajme, že v rovine je daný pravouhlý súradnicový systém. Nech Ω je množinou bodov v rovine, ktoré predstavujú krivku. Nech $x(\omega)$ je prvou, $y(\omega)$ druhou súradnicou nejakého bodu $\omega \in \Omega$. Ak derivácia*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\omega) \quad \textit{alebo} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(\omega)$$

   v bode $\omega \in \Omega$ existuje, tak reprezentuje sklon krivky Ω v bode ω vzhľadom na prvú, resp. druhú, súradnicu koordinát.
2. *Ak sa osvetlený objekt nachádza na osi šošovky, tak aj jeho obraz je na tejto osi. Ak je vzdialenosť objektu od šošovky x a vzdialenosť obrazu od šošovky y, tak platí rovnosť $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = p$, pričom p je mohutnosťou (lámavosťou) šošovky (tá sa rovná $\frac{1}{r}$, pričom r je ohniskovou vzdialenosťou šošovky). Ak sa meter používa ako jednotka dĺžky, prislúchajúca jednotka mohutnosti šošovky sa nazýva dioptria (D).*

   U šošovky s meniteľnou mohutnosťou (resp. objektívu s meniteľnou ohniskovou vzdialenosťou) možno jej mohutnosť v istých medziach ľubovoľne nastaviť. Nech Ω je množinou všetkých nastavení takejto šošovky. Predpokladajme, že objekt sa nachádza od nej vo vzdialenosti 1 meter. Určte rýchlosť zmeny vzdialenosti obrazu od šošovky vzhľadom na jej mohutnosť v metroch na dioptriu. Aká je táto rýchlosť, ak šošovka má mohutnosť 2 dioptrie? Aká, ak má 5 dioptrií?

3. *Keďže Zem je guľatá, mierka na rovinnej mape nemôže byť všade rovnaká. Na určitej mape sveta je Londýn vzdialený od Štokholmu 25 milimetrov. V skutočnosti sú mestá od seba vzdialené 1470 km (t. j. 1 470 000 000 milimetrov), čiže na mape sú zakreslené (pokiaľ ide o ich vzájomnú polohu) v mierke 1 : 59 000 000. Ak by sme namiesto uvedenej dvojice použili Singapur a Manilu, šlo by o mierku 1 : 80 000 000. Prísne vzaté, mierka sa od jednej dvojice k druhej mení, takže dané mierky sú fakticky len priemernými mierkami.*

   Predpokladajme, že geodetická čiara spája Londýn a Štokholm a na mape je nakreslená k nej prislúchajúca čiara Ω. Nech pre nejaké $\omega \in \Omega$ je $f(\omega)$ je vzdialenosťou (v milimetroch) bodu predstavujúceho na mape Londýn od ω pozdĺž čiary Ω a nech $h(\omega)$ je skutočnou vzdialenosťou (opäť v milimetroch) Londýn od bodu na Zemeguli predstavujúceho ω pozdĺž danej geodetickej čiary.

   Pre daný bod $\omega \in \Omega$ derivácia $\mathrm{D}_h f(\omega)$ reprezentuje mierku mapy pozdĺž čiary Ω v bode ω.
4. *Analogickým prípadom ako skreslenie geografických máp je skreslenie mikroskopov. Je nemožné skonštruovať mikroskop s absolútne konštantným zväčšením v rámci celého zorného poľa. Takže vzorom úsečky s koncovými bodmi A a B videnej cez mikroskop je čiara Ω, ktorá nutne nemusí byť rovná. Aké je zväčšenie takéhoto mikroskopu v bode $\omega \in \Omega$ pozdĺž čiary AB?*
5. *Vráťme sa ku cvičeniu??13 v stati??4. Nech Ω je množinou bodov nad zemským povrchom ležiacich na zvislej priamke. Nech x je súradnicovou funkciou na tejto priamke. Nech v určitom časovom okamihu je $p(\omega)$ tlakom vzduchu v nejakom bode $\omega \in \Omega$. Derivácia $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}_x p$ potom predstavuje vertikálny gradient tlaku vzduchu.*
6. *Vráťme sa ku cvičeniam??15 a ??19 v stati??4. Nech Ω je množinou všetkých možných „teplotných stavov“ kovovej tyče. V každom stave $\omega \in \Omega$ má tyč určitú teplotu $T(\omega)$, určitú dĺžku $\lambda(\omega)$ a určitý elektrický odpor $R(\omega)$. Vzhľadom na to, že pre isté $\omega \in \Omega$ sú hodnoty $\lambda(\omega)$ a $R(\omega)$ (pre danú tyč) jednoznačne určené hodnotou $T(\omega)$, možno si položiť otázku ohľadom existencie a hodnôt derivácie*

   $$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(\omega) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}(\omega)$$

   v nejakom $\omega \in \Omega$. Prvá sa nazýva koeficient teplotnej rozťažnosti, *druhá* koeficient teplotného odporu *danej tyče pri teplote $T(\omega)$.*
7. *Vráťte sa ku cvičeniu??14 zo state??4 a nanovo zadefinujte „konštantu pružnosti“ pružiny využijúc pojmy z tejto state.*
8. *O marginálnom dopyte po komodite (pozri príklad 22.3.4) možno hovoriť*

iba vtedy, keď dopyt po predmetnej komodite závisí výlučne od jej ceny na danej množine možných stavov ekonomiky Ω. Čiže, ak existuje taká funkcia reálnej premennej F, že $f(\omega) = F(p(\omega))$ pre každé $\omega \in \Omega$. V tom prípade sa cenová pružnosť (elasticita) dopytu (zvyčajne sa uvádza iba slovné spojenie elasticita dopytu) definuje ako

$$E = \frac{p}{f} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} \,.$$

Elasticita dopytu je bezrozmerným parametrom.
Aká je elasticita dopytu E, ak funkciou dopytu je $f = 100 - 5p - 2p^2$? Aká je elasticita dopytu, ak sa cena jednotkového množstva predmetnej komodity rovná 4 menovým jednotkám?

9. *V kontexte predchádzajúceho cvičenia predpokladajme, že existuje taká konštanta a a také prirodzené číslo r, že $f = ap^{-r}$. Ukážte, že elasticita dopytu je konštantná funkcia (a teda ani nezávisí od ceny).*

22.4 Pravidlá počítania

Veta 22.4.1. *Nech n je prirodzené číslo. Nech f_j sú funkcie diferencovateľné podľa funkcie h v bode ω a c_j sú čísla pre $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom je funkcia*

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$$

diferencovateľná podľa funkcie h v bode ω a platí

$$\mathrm{D}_h f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(\omega) \,. \tag{22.9}$$

Dôkaz. Nech M je definičným oborom funkcie h. Podľa predpokladu existuje také okolie V čísla $y = h(\omega)$ a také funkcie F_j, diferencovateľné v y, že $h(\xi) \in V$ a súčasne $\mathrm{D}F_j(\omega) = \mathrm{D}_h f_j(\omega)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Nech

$$F = \sum_{j-1}^{n} c_j F_j \,.$$

Potom $f(\xi) = F(h(\xi))$ pre každé také $\xi \in M$, že $h(\xi) \in V$, a podľa vety **??**6.3

$$\mathrm{D}F(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{D}F_j(y) \,.$$

To znamená, že funkcia f je diferencovateľná podľa funkcie h v ω, čiže platí (22.9). $\square$

Príklad 22.4.1. *Vo výške H nad rovnou cestou je zavesená lampa. Po nej kráča alebo beží chlapec, vysoký h jednotiek dĺžky, $0 < h < H$. Ak je chlapcova rýchlosť, závisiaca od času, známa, tak možno vypočítať, s akou rýchlosťou sa predlžuje jeho tieň.*

Nech x je vzdialenosťou chlapca od bodu priamo pod lampou a nech y je dĺžkou jeho tieňa. Obe funkcie x a y závisia potom od času, t. j. sú funkciami času. Nech t je časovou súradnicou.

Jednoduchou geometrickou úvahou vychádzajúcou z podobnosti určitých trojuholníkov (pozri obr. 22.1) možno dostať

$$\frac{x+y}{H} = \frac{y}{x} \, .$$

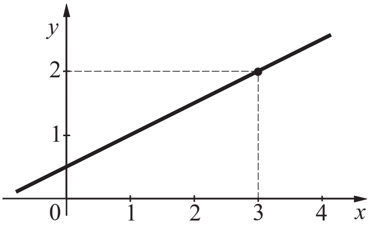
Podľa vety 22.4.1 preto platí

$$\frac{1}{H}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{h}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \, .$$

V dôsledku toho

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{H-h}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, .$$

Keďže $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ predstavuje rýchlosť, s ktorou sa chlapec pohybuje a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ rýchlosť, s akou sa jeho tieň predlžuje, problém je vyriešený.



Obrázok 22.1.

Veta 22.4.2. *Nech f a g sú funkcie diferencovateľné podľa funkcie h v bode ω. Potom je diferencovateľná v ω podľa h aj funkcia $f\,g$ a platí*

$$\mathrm{D}_h(f\,g)(\omega) = \mathrm{D}_h f(\omega) g(\omega) + f(\omega)\mathrm{D}_h g(\omega) \, . \tag{22.10}$$

Ak okrem toho $f(\omega) \neq 0$, tak je diferencovateľnou podľa h v ω tiež funkcia $\frac{g}{f}$ a súčasne

$$\mathrm{D}_h(\frac{g}{f})(\omega) = \frac{f(\omega)\mathrm{D}_h g(\omega) - \mathrm{D}_h f(\omega) g(\omega)}{f^2(\omega)} \, . \tag{22.11}$$

Dôkaz. Nech M je definičným oborom funkcie h. Nech V je takým okolím čísla $y = h(\omega)$ a zároveň F a G takými funkciami, že $f(\xi) = F(h(\xi))$ a $g(\xi) = G(h(\xi))$ pre každé $\xi \in M$, spĺňajúce $h(\xi) \in V$ a $\mathrm{D}_h f(y) = \mathrm{D}F(y)$, $\mathrm{D}_h g(y) = \mathrm{D}G(y)$. Potom $(f\,g)(\xi) = (F\,G)(h(\xi))$ pre každé také $\xi \in M$, že $h(\xi) \in V$. Podľa vety **??**6.4 je funkcia $F\,G$ diferencovateľná v y a platí

$$\mathrm{D}(F\,G)(y) = \mathrm{D}F(y)G(y) + F(y)\mathrm{D}g(y)\ .$$

Avšak $F(y) = f(\omega)$ a $G(y) = g(\omega)$, čiže je splnená rovnosť (22.10).

Predpokladajme, že $f(\omega) \neq 0$. Potom aj $F(y) \neq 0$. V dôsledku vety **??**5.1 je funkcia F spojitá v y a podľa vety **??**I.5.1 existuje také okolie U čísla y, že $F(y) \neq 0$ pre každé $y \in U$. Nech $W = V \cap U$. Potom W je takým okolím y, že $(\frac{g}{h}) = (\frac{G}{H})(h(\xi))$ pre každé $\xi \in M$, spĺňajúce $h(\xi) \in W$. Navyše podľa vety **??**6.6 je funkcia $\frac{G}{F}$ diferencovateľná v y a platí

$$\mathrm{D}(\frac{G}{F})(y) = \frac{F(y)\mathrm{D}G(y) - \mathrm{D}F(y)G(y)}{F^2(y)}\ .$$

Takže funkcia $\frac{g}{f}$ je diferencovateľná podľa h v ω, a teda je splnená rovnosť (22.11). □

Príklad 22.4.2. *Vráťme sa k príkladu 22.3.4. Derivácia príjmu R výrobcu komodity podľa dopytu f predmetnej komodity v stave ekonomiky ω je určená vzťahom*

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}f}(\omega) = p(\omega) + f(\omega)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}f}(\omega)\ ,$$

pričom p je cenou komodity.

Veta 22.4.3. *Nech f je funkcia diferencovateľná podľa funkcie g v bode ω a súčasne nech funkcia g je diferencovateľná podľa h v ω. Potom je funkcia f diferencovateľná podľa funkcie h v bode ω a platí*

$$\mathrm{D}_h f(\omega) = \mathrm{D}_g f(\omega)\mathrm{D}_h g(\omega)\ . \tag{22.12}$$

Dôkaz. Nech L je definičným oborom funkcie g a M definičným oborom funkcie h. Podľa predpokladu existuje také okolie W čísla $z = g(\omega)$ a taká funkcia F, že $W \subset \{g(\xi) : \ \xi \in L\}$, $f(\xi) = F(g(\xi))$ pre každé $\xi \in L$, spĺňajúce $g(\xi) \in W$ a $\mathrm{D}_h f(\omega) = \mathrm{D}F(z)$. Zároveň existuje také okolie V_0 čísla $y = h(\omega)$ a taká funkcia G, že $V_0 \subset \{h(\xi) : \ \xi \in M\}$, $g(\xi) = G(g(\xi))$ pre každé $\xi \in M$ spĺňajúce $h(\xi) \in V_0$ a $\mathrm{D}_h g(\omega) = \mathrm{D}G(y)$. Potom $z = G(y)$.

Podľa vety **??**5.1 je funkcia G spojitá v y. A preto existuje také okolie V_1 čísla y, že $G(z) \in W$ pre každé $z \in V_1$. Nech $V = V_0 \cap V_1$. Potom je V takým okolím čísla y, že ak $\xi \in M$ a zároveň $h(\xi) \in V$, tak $g(\xi) = G(h(\xi)) \in W$, a teda

$$f(\xi) = F(h(\xi)) = F\big(G(h(\xi))\big) = (F \circ G)(h(\xi)) .$$

A podľa vety **??**7.1

$$\mathrm{D}_h f(\omega) = \mathrm{D}(F \circ G)(y) = \mathrm{D}F(z)\mathrm{D}G(y) = \mathrm{D}_g f(\omega)\mathrm{D}_h g(\omega) .$$

□

Prostredníctvom iného spôsobu označovania možno formulu (22.12) zapísať ako

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}(\omega) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}(\omega)\, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(\omega) .$$

Vzťah pripomína pravidlo pre krátenie zlomkov. V tejto podobe je formula známa ako reťazové pravidlo.

Príklad 22.4.3. *Do guľatého balóna je vháňaný pod konštantným tlakom vzduch s konštantnou rýchlosťou ω. S akou rýchlosťou sa zväčšuje polomer balóna r?*

Riešenie problému si vyžaduje uvedomiť fakt, že objem balóna sa rovná $V = \alpha\, r^3$, pričom číslo α sa nemení (približne sa rovná 4,188 78. . .).

Ak t je časovo-súradnicovou funkciou, tak podľa vety 22.4.3 platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} .$$

A keďže

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 3\alpha r^2 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \omega ,$$

rýchlosť ω spĺňa rovnosť

$$\omega = 3\alpha\, r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} .$$

V dôsledku toho sa polomer balóna zväčšuje s rýchlosťou

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{3\alpha\, r^2} . \tag{22.13}$$

Veta 22.4.4. *Nech f je funkcia diferencovateľná podľa funkcie g a funkcia g diferencovateľná podľa funkcie f v bode ω. Potom platí*

$$\mathrm{D}_g f(\omega)\mathrm{D}_f g(\omega) = 1 . \tag{22.14}$$

Dôkaz. Nech L je definičným oborom funkcie F a M definičným oborom funkcie g. Nech U je takým okolím čísla $x = g(\omega)$ a F takou funkciou, že $U \subset \{g(\xi) : \ \xi \in M\}$, $f(\xi) = F(g(\xi))$ pre každé $\xi \in M$ spĺňajúce $g(\omega) \in U$ a $\mathrm{D}_g f(\omega) = \mathrm{D}F(x)$. Nech V je takým okolím čísla $y = f(\omega)$ a G takou funkciou, že $V \subset \{f(\xi) : \ \xi \in L\}$, $g(\xi) = G(g(\xi))$ pre každé $\xi \in L$ spĺňajúce $f(\xi) \in V$ a $\mathrm{D}_f g(\omega) = \mathrm{D}G(y)$. Potom $x = G(y)$ a $F(G(y)) = y$ pre každé $y \in V$. Z vety **??**7.1 vyplýva, že $\mathrm{D}F(x)\mathrm{D}G(y) = 1$, čo je v skutočnosti (22.14). □

Príklad 22.4.4. *Ako závisí povrch kocky A s ohľadom na jej objem V od dĺžky jej strany s?*

Platí $A = 6s^2$ a $V = s^3$, a teda

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s} = 12s \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = 3s^2 \,.$$

Podľa reťazového pravidla

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V} \,.$$

Na výpočet $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V}$ využijeme vetu 22.4.4, podľa ktorej

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V}\,3s^2 = 1$$

z čoho

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{3s^2} \,.$$

V dôsledku toho

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V} = 12s\,\frac{1}{3s^2} = \frac{4}{s} \,.$$

Cvičenia

1. *Nech f je taká funkcia, že $f(1)$ a súčasne*

$$x^2 f^5(x) + x^4 f(x) - 2x f^3(x) + f^2(x) - 1 = 0$$

   pre každé x z okolia 1, diferencovateľná v 1. Vypočítajte $\mathrm{D}f(1)$.

2. *Funkcie f a g spĺňajú rovnosť*

$$3f^5(\omega) - 4f^3(\omega)g(\omega) + f^2(\omega)g^2(\omega) - 3 = 0$$

   pre každý bod ω z ich definičného oboru. Predpokladajme, že ω je takým bodom, že $f(\omega) = 1$ a $g(\omega) = 2$ a zároveň je funkcia f diferencovateľná podľa g v ω. Vypočítajte $\mathrm{D}_g f(\omega)$.

3. *Veličiny Q a R, ktoré závisia od ďalšej veličiny u, sú vo vzťahu $Q^3+R^3=9$ pre každé u. Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}$, ak viete, že $Q=2$ a $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u}=3$.*
4. *Častica sa pohybuje pozdĺž paraboly $\{[x,y]:\ y=x^2\}$. Vo chvíli, keď sa častica nachádza v bode $[2,4]$ jej druhá súradnica (ordináta) sa zväčšuje s rýchlosťou 3 jednotky dĺžky za jednu jednotku času. S akou rýchlosťou sa zväčšuje v tomto momente prvá súradnica (abscisa)?*
5. *Druhá súradnica (ordináta) bodu opisujúceho kružnicu $\{[x,y]:\ x^2+y^2=25\}$ (v metroch) sa zmenšuje s konštantnou rýchlosťou 1,5 m/s. S akou rýchlosťou sa mení prvá súradnica bodu (abscisa), ak sa druhá súradnica rovná 4 m?*
6. *V akom bode elipsy $\{[x,y]:\ 16x^2+9y^2=400\}$ sa jeho druhá súradnica zmenšuje s rovnakou rýchlosťou ako sa zväčšuje prvá súradnica?*
7. *Elektrický obvod je napájaný s konštantným elektrickým napätím U voltov. So zvyšujúcou sa teplotou obvodu vzrastá aj jeho odpor R v ohmoch s rýchlosťou q ohmov za sekundu. V ampéroch za sekundu určte, ako sa mení elektrický prúd v obvode? Osobitne to určte pre $U=24$, $R=4$ a $q=0,1$. (Návod: Využite Ohmov zákon, ktorý hovorí, že v každom okamihu platí $U=R\,I$.)*
8. *Z guľatého balóna uniká vzduch s rýchlosťou q litrov za sekundu. S akou rýchlosťou sa zmenšuje povrch balóna, ak sa jeho polomer rovná r centimetrom? (Návod: Povrch gule s polomerom r sa rovná $3\alpha\, r^2$), pričom α je číslo spomínané v príklade 22.4.3.)*
9. *Ak L_0 je dĺžka medeného drôtu s teplotou 0 °C, tak jeho dĺžka L v metroch pri teplote T °C sa približne rovná*

$$L=L_0(1+16\cdot 10^{-6}T+10^{-8}T^2)\,.$$

S akou rýchlosťou sa mení L podľa času, ak $T=50$ °C a rýchlosť jej zmeny sa rovná 3 °C za minútu?
10. *Rebrík dlhý 8 metrov je opretý o zvislú stenu. S akou rýchlosťou klesá jeho vrch, ak sa jeho spodok pohybuje smerom od steny s konštantnou rýchlosťou 1,2 metra za sekundu v momente, keď sa nachádza od nej 3 metre?*
11. *Z odpaľovacej rampy vzdialenej jeden kilometer od pozorovateľa je priamo hore vypustená raketa. Ako rýchlo sa vzďaľuje od pozorovateľa dve sekundy po štarte, ak stúpa s konštantnou rýchlosťou 830 metrov za sekundu?*
12. *Náklad sena je zavesený na povraze prevlečenom cez kladku na tráme stodoly vo výške 12 metrov nad zemou. Druhý koniec povrazu je priviazaný o traktor vo výške pol metra nad zemou, ktorý ho ťahá s rýchlosťou 2 metre za sekundu. Ako rýchlo náklad stúpa, keď sa traktor nachádza vo vzdialenosti 16 metrov od kladky?*

13. *Vo výške 35 metrov je na veži umiestnené svietidlo. Z rovnakej výšky vo vzdialenosti 5 metrov od svietidla je pustená lopta. Predpokladajme, že lopta padá podľa zákona $s = \frac{1}{2}gt^2$, pričom g je gravitačným zrýchlením. Ako rýchlo sa pohybuje tieň lopty na zemi dve sekundy po vypustení lopty?*
14. *Voda vteká do polguľovitej nádrže s priemerom D metrov. Nech v istom okamihu h označuje v metroch najväčšiu hĺbku vody, r polomer vodnej hladiny (tiež v metroch) a V objem vody v nádrži (v kubických metroch). Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}$. Predpokladajme, že voda vteká do nádrže s konštantnou rýchlosťou q kubických metrov za sekundu. Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, čiže rýchlosť, s akou sa mení r. Úlohu vyriešte osobitne pre $D = 8$, $q = 1,3$ v okamihu, keď $h = 1,\ 2$ alebo 3. (Návod: Využite predpis $V = \frac{1}{4}\,\alpha\, h^2(\frac{1}{2}\,3D - h)$ pre každé $0 \leq h \leq \frac{1}{2}\,D$, pričom α je číslo spomínané v príklade 22.4.3.)*
15. *??Táto úloha sa zrejme vzťahuje na zadanie z predchádzajúcej, ale nie som si istý.?? S rýchlosťou 16 kubických stôp za minútu je vháňaná voda do 8 stôp dlhej hadice, ktorej priečny rez tvorí pravidelný trojuholník s dĺžkou strany 2 stopy. S akou rýchlosťou sa zväčšuje povrch hladiny vody v hĺbke 1 stopa?*
16. *Ak sa vzduch mení adiabaticky (bez zmeny tepla), tak jeho tlak P a objem V spĺňajú podmienku $P^5V^7 = c$, pričom c je konštanta (závisí od množstva vzduchu a tepelných podmienok). Predpokladajme, že v istom okamihu $P = 2,5$ atmosféry a $V = 3$ litre. Ako rýchlo vzrastá v tomto okamihu tlak, ak objem V klesá s rýchlosťou 0,005 litrov za sekundu?*
17. *Predpokladajme, že veličina u závisí od tlaku plynu P a je známa derivácia $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}P}$.*
    Pre tlak P a objem V určitého množstva ideálneho plynu s nemeniacou sa teplotou platí $P\,V = c$, pričom c je konštanta závisiaca od teploty, množstva a druhu plynu. Pre uvedený prípad vypočítajte $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}V}$.
    Nájdite deriváciu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}V}$ v situácii, keď tlak a objem vzduchu spĺňajú spomínanú podmienku pre adiabatický dej z predchádzajúceho cvičenia.

Igor Kluvánek

INTEGRÁLNY POČET FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ

tretí diel

Vydala
Pedagogická fakulta
Katolíckej univerzity
v Ružomberku

Ružomberok 2008

Z pripravených predlôh vytlačilo
MTM Levoča

ISBN 978-80-8084-236-9