24 | Primitívne funkcie

24.1 Koncept

Cvičenia

1. *Dokážte, že* $\int \mathrm{d}g = g$ *na* I*, vždy keď* g *je funkciou diferencovateľnou v každom bode intervalu* I.
2. *Ukážte, že existuje také číslo* c*, že* $\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + c$ *pre každé* $x \in (1, \infty)$*. Nájdite číslo* c.
3. *Nech* M *je zjednotením otvorených intervalov* I *a* J*, ktoré nemajú spoločný bod. Hovoríme, že funkcia* g *je primitívnou funkciou k funkcii* f *na množine* M*, ak* $\mathrm{D}g(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in M$.
   Ukážte, že funkcia $(|x| - 1)/x$ *je primitívnou funkciou k* $1/x^2$ *na množine* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$*. Odôvodnite, že rovnako funkcia* $(x - 1)/x$ *a funkcia* $-1/x$ *sú primitívnymi k* $1/x^2$ *na* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
4. *Predchádzajúce cvičenie ilustruje neplatnosť vety* **??***, ak sa v jej predpokladoch zamení interval za množinu iného typu. To je dôvod, prečo sa primitívnymi funkciami zaoberáme iba na intervaloch. Ako vetu* **??** *nanovo sformulovať pre množiny takého druhu, aké figurujú v cvičení 3?*

24.2 Prvé vzorce

Cvičenia

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii* f *na intervale* I*, ak*

   a) $f = 4x^3 + 8x^2 - 7$ *a* $I = (-\infty, \infty)$*;*

b) $f = (\frac{1-x}{x})^2$ *a* $I = (-\infty, 0)$ *alebo* $I = (0, \infty)$;

c) $f = (10^x + 3^x)^3$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

d) $f = \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$ *a* $I = (n\pi, (n+1)\pi)$ *pre celé číslo* n;

e) $f = \operatorname{tg}^2$ *a* $I = ((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$ *pre celé číslo* n;

f) $f = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ *a* $I = (-2, 2)$;

g) $f = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ *a* $I = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;

h) $f = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ *a* $I = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$;

i) $f = \sqrt[3]{x}(1 - \sqrt[3]{x})$ *a* $I = (0, \infty)$.

24.3 Substitúcie

Cvičenia . . . .

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii* f *na intervale* I, *ak*

a) $f = \frac{2x-1}{x^2-x+7}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

b) $f = \frac{1}{x} \ln x$ *a* $I = (0, 1)$ *alebo* $I = (1, \infty)$;

c) $f = x\sqrt{1+x^2}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

d) $f = x\sqrt{1+3x^2}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

e) $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

f) $f = x^2(1+4x^3)^{-\frac{1}{3}}$ *a* $I = (-4^{-\frac{1}{3}}, \infty)$;

g) $f = (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

h) $f = (x+2)\sqrt{3x^2+12x+4}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

i) $f = x \exp x^2$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

j) $f = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ *a* $I = (0, \infty)$;

k) $f = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

l) $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ *a* $I = (-\infty, \infty)$;

m) $f = \frac{x}{4+\sqrt{x+4}}$ *a* $I = (-4, \infty)$;

n) $f = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ *a* $I = (-3, 3)$;

o) $f = \sqrt{\frac{9-x^2}{x}}$ *a* $I = (-3, 0)$ *alebo* $I = (0, 3)$;

p) $f = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ a $I = (-3, 3)$;

r) $f = \frac{\sin}{\sqrt{4-\cos^2}}$ a $I = (-\infty, \infty)$;

s) $f = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$ a $I = (\frac{1}{2}, \infty)$.

2. *Ukážte, že ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode nejakého intervalu I, tak*

   a) $\int \mathrm{D}f(x) \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos f(x)$, $x \in I$;

   b) $\int \frac{1}{1+f^2(x)} \mathrm{D}f(x)\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} f(x)$, $x \in I$.

3. *Ak funkcia f je diferencovateľnou a nadobúda kladnú hodnotu v každom bode nejakého intervalu I? tak $\int f^{-1}(x)\mathrm{D}f(x) = \ln f(x)$, $x \in I$. Uvedené tvrdenie dokážte.*

24.4 Metóda per partes

Cvičenia ....

1. *Vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii f na intervale I, ak*

   a) $f = x\sqrt{/}1 + x($ a $I = (-1, \infty)$;

   b) $f = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ a $I = (-1, \infty)$;

   c) $f = x^3\sqrt{x^2+2}$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   d) $f = (x-1)^2(x-2)^{12}$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   e) $f = x \sin x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   f) $f = x^2 \sin x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   g) $f = x \cos 2x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   h) $f = x^3 \operatorname{arctg} x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   i) $f = x^3 \cos 2x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   j) $f = x^5 \exp x^3$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   k) $f = \ln x$ a $I = (0, \infty)$;

   l) $f = \operatorname{arctg} x$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   m) $f = \arccos x$ a $I = (-1, 1)$;

   n) $f = x \sin x^2 \cos x^2$ a $I = (-\infty, \infty)$;

   o) $f = \exp\sqrt{x}$ a $I = (0, \infty)$;

   p) $f = \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}$ a $I = \big((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi\big)$ pre nejaké celé číslo n;

q) $f = \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x$ *a* $I = (-\infty, \infty)$.

2. *Nájdite rekurentný vzorec na výpočet primitívnej funkcie k* $\cos^n$ *na* $(-\infty, \infty)$, *pričom* $n \geq 0$ *je celé číslo.*
3. *Na intervale* $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, k *je nejaké celé číslo, určte rekurentný vzorec na výpočet primitívnej funkcie k* $\sin^{-n}$ *na* $(-\infty, \infty)$, *pričom* $n \geq 0$ *je celé číslo.*
   Na rovnakom intervale vypočítajte aj primitívnu funkciu k $\frac{1}{\sin^3 x}$.
4. *Ukážte, že pre ľubovoľné celé číslo* n *existuje primitívna funkcia* F_n *k funkcii* $\operatorname{tg}^n x$ *na ľubovoľnom otvorenom intervale* I *obsiahnutom v definičnom obore funkcie* tg. *Ukážte, že* F_n *možno zvoliť tak, aby pre* n *platila rovnosť*
   $$(n-1)F_n = \operatorname{tg}^{n-1} x - (n-1)F_{n-2} \text{ na } I.$$
   Potom vypočítajte primitívnu funkciu k tg^6.
5. *Dokážte, že ak* $a \neq 0$, *tak pre* $n \neq -\frac{1}{2}$ *platí*
   $$\int \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a(2n+1)} \left(x^n\sqrt{ax+b} - nb\int \frac{x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} \right),\ x \in (-\frac{a}{b}, \infty).$$
6. *Dokážte, že ak* $a \neq 0$, *tak pre* $n \neq -\frac{3}{2}$ *a* $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ *platí*
   $$\int x^n\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{a(2n+3)} \left(x^n\sqrt{(ax+b)^3} - nb\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x \right).$$
7. *Nech* a, b *sú ľubovoľné čísla. Vypočítajte primitívnu funkciu k funkciám* $\exp(ax)\cos(bx)$ *a* $\exp(ax)\sin(bx)$ *na* $(-\infty, \infty)$.

24.5 Príklady – racionálne funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, nájdite primitívnu funkciu k funkcii*

a) $\frac{x+1}{x-3}$;

b) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-6x}$;

c) $\frac{1}{x^4-2x^3}$;

d) $\frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2+x-2}$;

e) $\frac{x^2+3x+3}{x^3+5x^2+6x}$;

f) $\frac{1-x^3}{x^3+x}$;

g) $\frac{x+1}{x^3-1}$;

h) $\frac{1}{x^4-1}$;

i) $\frac{1-x^3}{x^4-2x^3}$;

j) $\frac{x^3}{(x-1)^2(x+2)^3}$;

k) $\frac{x}{x^3+6x^2+30x+25}$;

l) $\frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}$;

m) $\frac{3x^2+5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}$;

n) $\frac{1}{x^4-6x^3+10x^2-6x+9}$;

o) $\frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$;

p) $\frac{x^2-4}{x^4-3x^3+2x^2-4x+8}$;

r) $\frac{1}{x^3(1+x)(1-x^4)}$;

s) $\frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}$;

t) $\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$;

u) $\frac{x^2+x-2}{(x+3)^2(x-1)(x^2+6x+10)}$;

v) $\frac{x^8+x^6+2x^5+x^4+x^3-4x^2-2}{x^7+2x^5+x^3}$;

w) $\frac{x^2+x-2}{(x+3)^2(x-1)(x^2+6x+10)^3}$.

24.6 Príklady – niektoré iracionálne funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii*

a) $\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\,\frac{1}{(x+2)(3x+5)}$;

b) $\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

d) $\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}$;

e) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

f) $\sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}$.

2. *Na vhodnom otvorenom intervale, obsiahnutom v definičnom obore príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii*

a) $\frac{1}{x+\sqrt{x(x+1)}}$;

b) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$;

c) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

d) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

e) $\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

f $\frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}$;

g) $\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}$;

h) $\sqrt{5x^2-6x-1}$;

i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

j) $\frac{2x+1}{(x^2+2x+6)\sqrt{2x^2+4x-1}}$.

3. *Výpočet primitívnej funkcie k funkcii* $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$, *možno zredukovať prostredníctvom afinnej substitúcie na problém hľadania primitívnej funkcie k* $\frac{1}{\sqrt{x^2+\beta}}$ *alebo* $\frac{1}{\beta-x^2}$ *pre isté číslo* β. *Nájdite túto substitúciu a vypočítajte príslušnú primitívnu funkciu.*
4. *Primitívnu funkciu k* $\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *je možné vypočítať cez substitúciu* $x-\alpha=\frac{1}{y}$. *Takáto substitúcia redukuje problém na taký, ktorý figuroval v predchádzajúcom cvičení.*
5. *Využite výsledok z predchádzajúcej úlohy pri riešení úloh 2 b) a 2 i).*
6. *Ukážte, že ak* p *je polynóm stupňa* $n \geq 1$, *tak existuje taký polynóm* q *stupňa* $n-1$ *a číslo* α, *že*

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

na nejakom otvorenom intervale, na ktorom funkcia ax^2+bx+c *nadobúda kladné hodnoty.*
7. *Využite výsledky piateho cvičenia a vyriešte úlohy 2 f), 2 h) a 2 g).*

24.7 Príklady – niektoré transcendentné funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Na vhodnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru príslušnej funkcie, vypočítajte primitívnu funkciu k funkcii*

a) $\frac{1}{3+\cos x}$;

b) $\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}$;

c) $(3x^2+1)\text{arctg}\, x$;

d) $\cos^2 x\sin^3 x$;

e) $\text{tg}\,^5 x$;

f) $(\sin x+\cos 2x^2)\sin 2x$;

g) $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}$;

h) $\frac{\exp(2x)}{1+\exp x}$;

i) $\frac{\exp x-1}{\exp x+1}$;

j) $(\sin^3 x)\sqrt{\cos x}$;

k) $\frac{1}{1+\exp(2x)}$;

l) $(2x-1)\arcsin x$;

m) $(\ln^2\sin x)\text{cotg}\, x$;

n) $\frac{\arcsin x}{x^2}$;

o) $x\ln(1+x^2)$;

p) $(x^2+1)\sin^2 x$;

q) $\frac{\text{arctg}}{x^2}$;

r) $\frac{1}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$;

s) $\frac{x\text{arctg}\, x}{(1+x^2)^2}$;

t) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

u) $(tgx)\ln(\cos x)$;

v) $\text{arctg}\,\sqrt{1+x^2}$;

w) $\frac{\text{tg}\, x}{\ln(\cos x)}$;

x) $x\,\text{arctg}\, x$.

24.8 Po častiach konštantné a afinné funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $|x|$ na intervale $(-\infty,\infty)$.*
2. *Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $|x^3|$ na intervale $(-\infty,\infty)$.*
3. *Ak g je funkciou z príkladu **??**, tak $g(x)=\frac{1}{2}\,k(|x-a|+x-a)$ pre každé $x\in(-\infty,\infty)$. Ak H je primitívnou funkciou k (skôr asi absolútnej hodnote) ???modulu, napíšte ???dole primitívnu funkciu ku g.*
4. *Nech $f=\frac{1}{2}(\big|1-|x|\big|+1-|x|)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-\infty,\infty)$.*
5. *Nech $f(x)=\arcsin(\sin x)$ pre každé $x\in(-\infty,\infty)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-\infty,\infty)$.*
6. *Nech $f(x)=(-1)^{[x]}$ pre každé $x\in(-\infty,\infty)$. Načrtnite graf funkcie f. Nájdite primitívnu funkciu k funkcii f na intervale $(-5,5)$ a na intervale $(-\infty,\infty)$.*

24.9 Nutná podmienka

Cvičenia . . . .

1. *Ak* $f(x) = |\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] - \frac{1}{2}|$ *pre* $x \in (0,1\rangle$ *a* $f(0) = 0$*, tak* f *je funkciou so strednou hodnotou, ktorá ale nie je spojitá na intervale* $\langle 0,1\rangle$*. Dokážte to.*
2. *Odôvodnite, že zloženie dvoch funkcií so strednou hodnotou je funkciou so strednou hodnotou.*
3. *Súčet dvoch funkcií so strednou hodnotou nie je nutne funkciou so strednou hodnotou. Nájdite príklad.*
4. *Bez použitia vety* **??** *ukážte, že funkcia* f*, určená predpisom* $f(x) = 0$ *pre* $x \neq 0$ *a* $f(0) = 1$*, nemusí mať na intervale* $(-\infty, \infty)$ *primitívnu funkciu.*
5. *Dokážte, že ak* f *je funkciou so strednou hodnotou na intervale* I *a súčasne má limitu sprava v bode* x *z* I*, ktorý nie je pravým koncovým bodom* I*, tak* f *je spojitá sprava v* x*. Obdobne pre spojitosť zľava.*
6. *Ak* f *je funkciou so strednou hodnotou na intervale* I *a zároveň* $y \notin \{f(x)\colon x \in I\}$*, tak* $f(x) > y$ *pre každé* $x \in I$ *alebo* $f(x) < y$ *pre každé* $x \in I$*. Takže funkcia* f *je ohraničená alebo zhora, alebo zdola na* I*. Dokážte to.*
7. *Predpokladajme, že* f *je funkciou so strednou hodnotou na* $\langle a, b\rangle$*,* $a < b$*, a* k *je také číslo, že* $k \in \{f(x)\colon\ x \in (a, a+\delta)\}$ *pre každé* $\delta > 0$*, a že ku každému* $y \neq k$ *existuje také* $\eta > 0$*, že* $y \notin \{f(x)\colon\ x \in (a, a+\eta)\}$*. Dokážte, že* $k = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$*.*
8. *Nech* f *je funkciou so strednou hodnotou na* (a, b) *a súčasne je na tomto intervale ohraničená. Predpokladajme, že ku každému* y *existuje také* $\delta > 0$*, že* $y \notin \{f(x)\colon\ x \in (a, a+\delta)\}$*. Ukážte, že potom existuje* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$*.*

24.10 Fakticky primitívne funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Nech* $f(x) = (-1)^{[x]}$ *pre každé* $x \in (-\infty, \infty)$*. Na intervale* $\langle -5, 5\rangle$ *a intervale* $(-\infty, \infty)$ *nájdite fakticky primitívnu funkciu k funkcii* f*.*
2. *Nech* f *je funkcia spojitá na otvorenom intervale* I*. Dokážte, že funkcia* F*, fakticky primitívna k funkcii* f *na intervale* I*, je primitívnou funkciou k* f *na* I*, čiže* $\mathrm{D}F(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in I$ *bez výnimky.*
3. *Nech* $f(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ *pre každé* $x \neq 0$*. Nájdite funkciu fakticky primitívnu k funkcii* f *na intervale* $(-\infty, \infty)$*.*

4. *Existuje funkcia fakticky primitívna ku charakteristickej funkcii množiny všetkých racionálnych čísel alebo množiny všetkých iracionálnych čísel? (Návod: Množina všetkých racionálnych čísel je spočítateľná.)*
5. *Nech* $f(x) = 1 - x^2[x^{-2}]$ *pre každé* $x \neq 0$. *Nájdite funkciu fakticky primitívnu k funkcii* f *na intervale* $(-\infty, \infty)$.