23 | Diferenciál funkcie

23.1 Derivácia podľa funkcie

Cvičenia . . . .

1. *Vypočítajte* $\mathrm{D}_h f$*, ak*
   a) $f = x^0 + 5x^4 - 19x^6$ *a* $h = x^2$*;*
   b) $f = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ *a* $h = x^2$*;*
   c) $f = \left(\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2})\right)^{-1}$ *a* $h = x^2$*;*
   d) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = \sqrt{x}$*;*
   e) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = x$*;*
   f) $f = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ *a* $h = x^2$*.*

23.2 Príklady

Cvičenia . . . .

1. *Predpokladajme, že v rovine je daný pravouhlý súradnicový systém. Nech* Ω *je množinou bodov v rovine, ktoré predstavujú krivku. Nech* $x(\omega)$ *je prvou,* $y(\omega)$ *druhou súradnicou nejakého bodu* $\omega \in \Omega$*. Ak derivácia*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\omega) \quad \textit{alebo} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(\omega)$$

   v bode $\omega \in \Omega$ *existuje, tak reprezentuje sklon krivky* Ω *v bode* ω *vzhľadom na prvú, resp. druhú, súradnicu koordinát.*

2. *Ak sa osvetlený objekt nachádza na osi šošovky, tak aj jeho obraz je na tejto osi. Ak je vzdialenosť objektu od šošovky x a vzdialenosť obrazu od šošovky y, tak platí rovnosť $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = p$, pričom p je mohutnosťou (lámavosťou) šošovky (tá sa rovná $\frac{1}{r}$, pričom r je ohniskovou vzdialenosťou šošovky). Ak sa meter používa ako jednotka dĺžky, prislúchajúca jednotka mohutnosti šošovky sa nazýva dioptria (D).*
   U šošovky s meniteľnou mohutnosťou (resp. objektívu s meniteľnou ohniskovou vzdialenosťou) možno jej mohutnosť v istých medziach ľubovoľne nastaviť. Nech Ω je množinou všetkých nastavení takejto šošovky. Predpokladajme, že objekt sa nachádza od nej vo vzdialenosti 1 meter. Určte rýchlosť zmeny vzdialenosti obrazu od šošovky vzhľadom na jej mohutnosť v metroch na dioptriu. Aká je táto rýchlosť, ak šošovka má mohutnosť 2 dioptrie? Aká, ak má 5 dioptrií?
3. *Keďže Zem je guľatá, mierka na rovinnej mape nemôže byť všade rovnaká. Na určitej mape sveta je Londýn vzdialený od Štokholmu 25 milimetrov. V skutočnosti sú mestá od seba vzdialené 1470 km (t. j. 1 470 000 000 milimetrov), čiže na mape sú zakreslené (pokiaľ ide o ich vzájomnú polohu) v mierke 1 : 59 000 000. Ak by sme namiesto uvedenej dvojice použili Singapur a Manilu, šlo by o mierku 1 : 80 000 000. Prísne vzaté, mierka sa od jednej dvojice k druhej mení, takže dané mierky sú fakticky len priemernými mierkami.*
   Predpokladajme, že geodetická čiara spája Londýn a Štokholm a na mape je nakreslená k nej prislúchajúca čiara Ω. Nech pre nejaké $\omega \in \Omega$ je $f(\omega)$ je vzdialenosťou (v milimetroch) bodu predstavujúceho na mape Londýn od ω pozdĺž čiary Ω a nech $h(\omega)$ je skutočnou vzdialenosťou (opäť v milimetroch) Londýn od bodu na Zemeguli predstavujúceho ω pozdĺž danej geodetickej čiary.
   Pre daný bod $\omega \in \Omega$ derivácia $\mathrm{D}_h f(\omega)$ reprezentuje mierku mapy pozdĺž čiary Ω v bode ω.
4. *Analogickým prípadom ako skreslenie geografických máp je skreslenie mikroskopov. Je nemožné skonštruovať mikroskop s absolútne konštantným zväčšením v rámci celého zorného poľa. Takže vzorom úsečky s koncovými bodmi A a B videnej cez mikroskop je čiara Ω, ktorá nutne nemusí byť rovná. Aké je zväčšenie takéhoto mikroskopu v bode $\omega \in \Omega$ pozdĺž čiary AB?*
5. *Vráťme sa ku cvičeniu??13 v stati??4. Nech Ω je množinou bodov nad zemským povrchom ležiacich na zvislej priamke. Nech x je súradnicovou funkciou na tejto priamke. Nech v určitom časovom okamihu je $p(\omega)$ tlakom vzduchu v nejakom bode $\omega \in \Omega$. Derivácia $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}_x p$ potom predstavuje vertikálny gradient tlaku vzduchu.*

6. *Vráťme sa ku cvičeniam??15 a ??19 v stati??4. Nech Ω je množinou všetkých možných „teplotných stavov" kovovej tyče. V každom stave $\omega \in \Omega$ má tyč určitú teplotu $T(\omega)$, určitú dĺžku $\lambda(\omega)$ a určitý elektrický odpor $R(\omega)$. Vzhľadom na to, že pre isté $\omega \in \Omega$ sú hodnoty $\lambda(\omega)$ a $R(\omega)$ (pre danú tyč) jednoznačne určené hodnotou $T(\omega)$, možno si položiť otázku ohľadom existencie a hodnôt derivácie*

   $$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}(\omega) \quad a \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}(\omega)$$

   v nejakom $\omega \in \Omega$. Prvá sa nazýva koeficient teplotnej rozťažnosti, *druhá* koeficient teplotného odporu *danej tyče pri teplote $T(\omega)$.*
7. *Vráťte sa ku cvičeniu??14 zo state??4 a nanovo zadefinujte „konštantu pružnosti" pružiny využijúc pojmy z tejto state.*
8. *O marginálnom dopyte po komodite (pozri príklad* **??***) možno hovoriť iba vtedy, keď dopyt po predmetnej komodite závisí výlučne od jej ceny na danej množine možných stavov ekonomiky Ω. Čiže, ak existuje taká funkcia reálnej premennej F, že $f(\omega) = F(p(\omega))$ pre každé $\omega \in \Omega$. V tom prípade sa cenová pružnosť (elasticita) dopytu (zvyčajne sa uvádza iba slovné spojenie elasticita dopytu) definuje ako*

   $$E = \frac{p}{f}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\,.$$

   Elasticita dopytu je bezrozmerným parametrom.
   Aká je elasticita dopytu E, ak funkciou dopytu je $f = 100 - 5p - 2p^2$? Aká je elasticita dopytu, ak sa cena jednotkového množstva predmetnej komodity rovná 4 menovým jednotkám?
9. *V kontexte predchádzajúceho cvičenia predpokladajme, že existuje taká konštanta a a také prirodzené číslo r, že $f = ap^{-r}$. Ukážte, že elasticita dopytu je konštantná funkcia (a teda ani nezávisí od ceny).*

23.3 Pravidlá počítania

Cvičenia . . . .

1. *Nech f je taká funkcia, že $f(1)$ a súčasne*

   $$x^2 f^5(x) + x^4 f(x) - 2x f^3(x) + f^2(x) - 1 = 0$$

   pre každé x z okolia 1, diferencovateľná v 1. Vypočítajte $\mathrm{D}f(1)$.

2. *Funkcie f a g spĺňajú rovnosť*
$$3f^5(\omega) - 4f^3(\omega)g(\omega) + f^2(\omega)g^2(\omega) - 3 = 0$$
pre každý bod ω z ich definičného oboru. Predpokladajme, že ω je takým bodom, že $f(\omega) = 1$ a $g(\omega) = 2$ a zároveň je funkcia f diferencovateľná podľa g v ω. Vypočítajte $\mathrm{D}_g f(\omega)$.
3. *Veličiny Q a R, ktoré závisia od ďalšej veličiny u, sú vo vzťahu $Q^3 + R^3 = 9$ pre každé u. Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}$, ak viete, že $Q = 2$ a $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u} = 3$.*
4. *Častica sa pohybuje pozdĺž paraboly $\{[x,y] : \ y = x^2\}$. Vo chvíli, keď sa častica nachádza v bode $[2,4]$ jej druhá súradnica (ordináta) sa zväčšuje s rýchlosťou 3 jednotky dĺžky za jednu jednotku času. S akou rýchlosťou sa zväčšuje v tomto momente prvá súradnica (abscisa)?*
5. *Druhá súradnica (ordináta) bodu opisujúceho kružnicu $\{[x,y] : \ x^2 + y^2 = 25\}$ (v metroch) sa zmenšuje s konštantnou rýchlosťou 1,5 m/s. S akou rýchlosťou sa mení prvá súradnica bodu (abscisa), ak sa druhá súradnica rovná 4 m?*
6. *V akom bode elipsy $\{[x,y] : \ 16x^2 + 9y^2 = 400\}$ sa jeho druhá súradnica zmenšuje s rovnakou rýchlosťou ako sa zväčšuje prvá súradnica?*
7. *Elektrický obvod je napájaný s konštantným elektrickým napätím U voltov. So zvyšujúcou sa teplotou obvodu vzrastá aj jeho odpor R v ohmoch s rýchlosťou q ohmov za sekundu. V ampéroch za sekundu určte, ako sa mení elektrický prúd v obvode? Osobitne to určte pre $U = 24$, $R = 4$ a $q = 0,1$. (Návod: Využite Ohmov zákon, ktorý hovorí, že v každom okamihu platí $U = R\,I$.)*
8. *Z guľatého balóna uniká vzduch s rýchlosťou q litrov za sekundu. S akou rýchlosťou sa zmenšuje povrch balóna, ak sa jeho polomer rovná r centimetrom? (Návod: Povrch gule s polomerom r sa rovná $3\alpha\, r^2$), pričom α je číslo spomínané v príklade **??**.)*
9. *Ak L_0 je dĺžka medeného drôtu s teplotou 0 °C, tak jeho dĺžka L v metroch pri teplote T °C sa približne rovná*
$$L = L_0(1 + 16 \cdot 10^{-6}T + 10^{-8}T^2)\,.$$
S akou rýchlosťou sa mení L podľa času, ak $T = 50$ °C a rýchlosť jej zmeny sa rovná 3 °C za minútu?
10. *Rebrík dlhý 8 metrov je opretý o zvislú stenu. S akou rýchlosťou klesá jeho vrch, ak sa jeho spodok pohybuje smerom od steny s konštantnou rýchlosťou 1,2 metra za sekundu v momente, keď sa nachádza od nej 3 metre?*
11. *Z odpaľovacej rampy vzdialenej jeden kilometer od pozorovateľa je priamo hore vypustená raketa. Ako rýchlo sa vzďaľuje od pozorovateľa dve sekundy po štarte, ak stúpa s konštantnou rýchlosťou 830 metrov za sekundu?*

12. *Náklad sena je zavesený na povraze prevlečenom cez kladku na tráme stodoly vo výške 12 metrov nad zemou. Druhý koniec povrazu je priviazaný o traktor vo výške pol metra nad zemou, ktorý ho ťahá s rýchlosťou 2 metre za sekundu. Ako rýchlo náklad stúpa, keď sa traktor nachádza vo vzdialenosti 16 metrov od kladky?*
13. *Vo výške 35 metrov je na veži umiestnené svietidlo. Z rovnakej výšky vo vzdialenosti 5 metrov od svietidla je pustená lopta. Predpokladajme, že lopta padá podľa zákona $s = \frac{1}{2}gt^2$, pričom g je gravitačným zrýchlením. Ako rýchlo sa pohybuje tieň lopty na zemi dve sekundy po vypustení lopty?*
14. *Voda vteká do polguľovitej nádrže s priemerom D metrov. Nech v istom okamihu h označuje v metroch najväčšiu hĺbku vody, r polomer vodnej hladiny (tiež v metroch) a V objem vody v nádrži (v kubických metroch). Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}$. Predpokladajme, že voda vteká do nádrže s konštantnou rýchlosťou q kubických metrov za sekundu. Vypočítajte $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, čiže rýchlosť, s akou sa mení r. Úlohu vyriešte osobitne pre $D = 8$, $q = 1,3$ v okamihu, keď $h = 1,\ 2$ alebo 3. (Návod: Využite predpis $V = \frac{1}{4}\,\alpha\, h^2(\frac{1}{2}\,3D - h)$ pre každé $0 \leq h \leq \frac{1}{2}\,D$, pričom α je číslo spomínané v príklade **??**.)*
15. *??Táto úloha sa zrejme vzťahuje na zadanie z predchádzajúcej, ale nie som si istý.?? S rýchlosťou 16 kubických stôp za minútu je vháňaná voda do 8 stôp dlhej hadice, ktorej priečny rez tvorí pravidelný trojuholník s dĺžkou strany 2 stopy. S akou rýchlosťou sa zväčšuje povrch hladiny vody v hĺbke 1 stopa?*
16. *Ak sa vzduch mení adiabaticky (bez zmeny tepla), tak jeho tlak P a objem V spĺňajú podmienku $P^5V^7 = c$, pričom c je konštanta (závisí od množstva vzduchu a tepelných podmienok). Predpokladajme, že v istom okamihu $P = 2,5$ atmosféry a $V = 3$ litre. Ako rýchlo vzrastá v tomto okamihu tlak, ak objem V klesá s rýchlosťou 0,005 litrov za sekundu?*
17. *Predpokladajme, že veličina u závisí od tlaku plynu P a je známa derivácia $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}P}$.*
    Pre tlak P a objem V určitého množstva ideálneho plynu s nemeniacou sa teplotou platí $P\,V = c$, pričom c je konštanta závisiaca od teploty, množstva a druhu plynu. Pre uvedený prípad vypočítajte $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}V}$.
    Nájdite deriváciu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}V}$ v situácii, keď tlak a objem vzduchu spĺňajú spomínanú podmienku pre adiabatický dej z predchádzajúceho cvičenia.