22 | Goniometrické funkcie

22.1 Funkcie kosínus a sínus

Cvičenia 22.1

1. Vypočítajte deriváciu každého rádu funkcie kosínus a sínus.

2. Dokážte, že
$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

3. Vypočítajte
   i) $\lim\limits_{x\to a} = \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$;
   ii) $\lim\limits_{x\to 0} = \frac{\sin ax}{x}$ pre dané číslo a.

4. Vypočítajte derivácie funkcií
   i) $\sqrt{1+\cos^2}$;
   ii) $\cos(\exp(\sin))$;
   iii) $\frac{1}{1+\sin^2}$;
   iv) $\frac{x}{1+\exp(\cos)}$;
   v) $\frac{\ln(1+\sin^2)}{x^2+\cos^2}$;
   vi) $x\cos(1+\exp)$;
   vii) $\exp(\cos)\sin(x+\ln(x^2+1))$;
   viii) $\frac{\cos(x^2+1)}{\cos^2+1}$.

5. Dokážte, že $0,841\ 468 < \sin 1 < 0,841\ 474$. To určuje $\sin 1$ s presnosťou na päť desatinných miest.

6. Vypočítajte $\sin\frac{1}{2}$, $\cos 1$, $\cos\frac{1}{2}$ s presnosťou na tri desatinné miesta.

7. Nájdite také funkcie f, ktoré sa nevynulujú v každom bode intervalu $(-\delta,\delta)$, $\delta > 0$, pričom platí
   i) $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$;
   ii) $f''(x) - (x+1)f'(x) - f(x) = 0$;

iii) $f''(x) - xf(x) = 0\,;$
iv) $2f''(x) - xf'(x) - 2f(x) = 0\,;$
v) $(1+x)f''(x) - f(x) = 0\,;$
vi) $(1-x^2)f''(x) - 5xf'(x) - 3f(x) = 0$

pre každé $x \in (-\delta, \delta)$.

8. Nájdite všetky také funkcie f, že $\mathrm{D}^2 f(x) = f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. (Návod: Ak $\mathrm{D}^2 f = f$, nech $g(x) = f(x)\exp(-x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Vypočítajte $\mathrm{D}^2 g$ a použite vetu V.5.2?????.)

22.2 Jedinečnosť

Cvičenia 22.2

1. Vetu **??** možno dokázať aj inak ako prostredníctvom vety **??**. Stačí ukázať, že derivácia funkcie $h^2 + (h')^2$, pričom h je funkcia definovaná v dôkaze vety **??**, sa vynuluje v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$. Doplňte podrobnosti.

2. Nech a, α, β sú čísla. Potom existuje jediná taká funkcia f, že platí $\mathrm{D}^2 f(x) + f(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a zároveň $f(a) = \alpha$, $\mathrm{D}f(a) = \beta$. Nájdite takú funkciu.

3. Nech a, b, α, β sú čísla, pričom $a \neq b$. Nájdite všetky také funkcie f, že $\mathrm{D}^2 f(x) + f(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a platí $f(a) = \alpha$, $\mathrm{D}f(b) = \beta$.

4. Ak f a g sú také funkcie, že $\mathrm{D}g(x) = f(x)$ a $\mathrm{D}f(x) = -g(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a platí $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, potom $f(x) = \cos x$ a $g(x) = \sin x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte to. (Návod: Ak $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, potom $\mathrm{D}h(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a $h(0) = 0$.)

5. Dokážte, že ak
$$x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$
pre každé $x \in (0, \infty)$, potom
$$f(x) = f(1)\cos(\ln x) + f'(1)\sin(\ln x)$$
pre každé $x \in (0, \infty)$. (Návod: Ukážte, že funkcia f definovaná vzťahom $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ spĺňa $g''(t) + g(t) = 0$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$.)

6. Dokážte, že ak
$$(1+x^2)(1-x^2)^4 f''(x) - 2x(3+x^2)(1-x^2)^3 f'(x) + (1+x^2)^3 f(x) = 0$$
pre každé $x \in (-1, 1)$, potom
$$f(x) = f(0)\cos\frac{x}{1-x^2} + f'(0)\sin\frac{x}{1-x^2}$$
pre každé $x \in (-1, 1)$. (Návod: Položte $f(x) = g(x/(1-x^2))$, $x \in (-1, 1)$ alebo $g(t) = f(\varphi(t))$, $t \in (-\infty, \infty)$, pričom φ je inverzná funkcia k funkcii $x \mapsto x/(1-x^2)$ pre každé $x \in (-1, 1)$.)

22.3 Vlastnosti funkcií kosínus a sínus

Cvičenia 22.3

1. Dokážte, že
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$
pre každé číslo x.

2. Dokážte, že
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x, \quad \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$
pre každé číslo x.

3. Dokážte, že
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big);$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) - \sin(x-y)\big);$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
pre každé číslo x a y.

4. Dokážte, že
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right);$$
$$\cos x - \cos y = -2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right);$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right);$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$
pre každé číslo x a y.

5. Nájdite všetky čísla x, pre ktoré $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Načrtnite graf funkcie $\sqrt{1-\cos^2}$.

6. Nájdite všetky čísla x, pre ktoré $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Načrtnite graf funkcie $\sqrt{1-\sin^2}$.

7. Dokážte, že funkcia $x \mapsto \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$, $x \in (-\infty, \infty)$, je konštantná a nájdite jej hodnotu.

8. Vypočítajte deriváciu funkcie

   i) $\frac{\sin}{1+\cos}$;

   ii) $\cos - \frac{\cos^3}{3}$;

iii) $\sin(\sin x)$;

iv) $\sin\sqrt{1+x^2}$;

v) $\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$;

vi) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

vii) $\frac{\exp}{\sin}$;

viii) $\sin\exp(\cos)$;

ix) $\cos(2x)\ln$;

x) $\sin^2\left(\frac{1-\ln}{x}\right)$;

xi) $x\exp(1-\cos)$;

xii) $\frac{1}{\cos(x-cos)}$;

xiii) $\ln(x\sin(x\sqrt{1-x^2}))$.

9. Vypočítajte

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

ii) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\cos x}}{\sin 2x}$;

iv) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$;

v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin 2x}$;

vi) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$;

vii) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{1-\cos\frac{1}{x}}$;

viii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}$;

ix) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\exp(x-2)-1}{\sin x}$;

x) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

xi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln\cos x}$;

xii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$.

10. Ak existuje, nájdite na danom intervale maximum alebo supremum a minumum alebo infimum funkcie

i) $\sin(2x)-x,\ \langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$;

ii) $\sin(2x)-2\cos x,\ \langle 0,2\pi\rangle$;

iii) $\exp\sin,\ (-\infty,\infty)$;

iv) $\exp(-x^2)\cos(x^2),\ (-\infty,\infty)$;

v) $\sin^3\cos,\ (-\infty,\infty)$;

vi) $\sin^2+\cos,\ (-\infty,\infty)$;

vii) $(1+\cos)\sin,\ (-\infty,\infty)$;

viii) $(1-\cos^2)\sin,\ (-\infty,\infty)$.

11. Načrtnite graf funkcie

   i) $3\sin+4\cos$;

   ii) $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\right)$;

   iii) $(a\cos^2+b\sin^2)\sin$;

   iv) $\frac{\sin}{x}$;

   v) $(a\cos^2+b\sin^2)\frac{\sin}{x}$;

   vi) $\frac{\sin^2}{x^2}$.

12. Porovnajte $\cos(\sin x)$ a $\sin(\cos x)$, $x\in(-\infty,\infty)$. (To znamená nájsť množiny $\{x:\ \cos(\sin x)>\sin(\cos x)\}$ a $\{x:\ \cos(\sin x)<\sin(\cos x)\}$.)

13. Ukážte, že ak $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $x<y$, potom $x-\sin x<y-\sin y$.

14. Ukážte, že
$$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$
pre každé $x>0$. S akou presnosťou platí táto nerovnosť, ak na výpočet použijeme $\sin\frac{1}{2}$?

15. Ukážte, že
$$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\geq\cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2$$
pre každé x a rovnosť platí len pre $x=0$.

16. Určte korene rovníc

   i) $\sin x+x=1$;

   ii) $\cos x=x^2$;

   iii) $\exp x=5\sin x$

   s presnosťou na dve desatinné miesta.

17. Určte najmenší kladný koreň rovníc

   i) $\sin x+\sin 2x=1,2$;

   ii) $\sin x=2x\cos x$;

   iii) $\mathrm{e}^x\sin x=1$.

18. Ukážte, že rovnica $x\sin x=3/2$ má štyri korene v intervale $\langle-\pi,\pi\rangle$.

19. Ukážte, že rovnica
$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=c$$
má dva korene v intervale $(0,2\pi)$, ak $c^2<8$, a štyri korene, ak $c^2>8$. Aké sú korene tejto rovnice, ak $c=2\sqrt{2}$?

20. Koľko koreňov má rovnica

   i) $x^2+\sin^2 x=1$;

ii) $\sin x - x - \frac{1}{6}x^3 = 0\,?$

21. Nech $s = p/q$, pričom p a q sú vzájomne nesúdeliteľné kladné celé čísla. Ak n je kladné celé číslo, nech $n = a\,q + r$, pričom a je podiel a r je zvyšok po delení čísla n deliteľom q. Potom $\sin(n\,p\,\pi/q) = (-1)^{ap}\sin(r\,p\,\pi/q)$. Ukážte, že množina $\{\sin(n\,p\,\pi/q)\}$ obsahuje q prvkov.

22.4 Funkcie arkuskosínus a arkussínus

Cvičenia 22.4

1. Ukážte, že k funkcii cos na intervale $\langle 2\pi, 3\pi\rangle$ existuje inverzná funkcia. Určte ju. Taktiež existuje inverzná funkcia ku cos na intervale $\langle \pi, 2\pi\rangle$. Nájdite ju.

   Ak k je celé číslo, nájdite inverznú funkciu k funkcii cos uvažovanú na intervale $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$.

2. Nech k je celé číslo. Nájdite inverznú funkciu k funkcii sin na intervale $\langle (k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi\rangle$.

3. Je známe, že $\arcsin(\sin x) = x$ pre každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Keďže $\sin x \in \langle -1, 1\rangle$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, hodnota $\arcsin(\sin x)$ je dobre definovaná pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Určte túto hodnotu a načrtnite graf funkcie $x \mapsto \arcsin(\sin x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

4. Vypočítajte $\arccos(\cos x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a načrtnite graf funkcie $x \mapsto \arccos(\cos x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

5. Vypočítajte $\arccos(\sin x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a načrtnite graf funkcie $x \mapsto \arccos(\sin x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

6. Vypočítajte $\arcsin(\cos x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a načrtnite graf funkcie $x \mapsto \arcsin(\cos x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

7. Dokážte, že

   i) $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$;
   ii) $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$;
   iii) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$;
   iv) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$.

8. Vypočítajte $\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $\arccos\sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arccos x)$ pre $x \in \langle -1, 0\rangle$.

9. Dokážte, že

   i) $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$;
   ii) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$;
   iii) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$;
   iv) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$.

10. Nájdite všetky čísla x, ktoré spĺňajú rovnosť

i) $\arcsin x + \arcsin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$;

ii) $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$;

iii) $\arcsin 3x - \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

11. Vypočítajte deriváciu funkcie

i) $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

ii) $\arccos(\sqrt{x})$;

iii) $x \arcsin + \sqrt{1-x^2}$;

iv) $x \arccos(2x) - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$;

v) $x \arcsin^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin$.

12. Ukážte, že funkcia f spĺňa podmienku $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ pre každé $x \in (-1,1)$ a súčasne $f(0) = 0$ práve vtedy, ak $f(x) = (\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in (-1,1)$. (Návod: Ukážte, že funkcia g, definovaná $g(x) = f(x)\sqrt{1-x^2} - \arcsin x$ pre $x \in (-1,1)$, má nulovú deriváciu v $(-1,1)$ a platí $g(0) = 0$.)

22.5 Funkcia tangens

Cvičenia 22.5

1. Vypočítajte deriváciu funkcie

i) $3\tan(2x)$;

ii) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

iii) $\cot(2x+3)$;

iv) $\tan^2(3x)$;

v) $\tan(3x^2)$;

vi) $\ln(1 - 4\tan)$;

vii) $\tan(x \sin)$;

viii) $\exp(\tan)$;

ix) $\sqrt{1 + \tan(x + 1/x)}$;

x) $\cos(\sqrt[3]{1+x^2})$.

2. Vypočítajte

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\tan x}{\sin 4x}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x\sin^2 x}$;

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x - 2\sin x}{x^3}$;

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x \cot x)$;

v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$;

vi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$.

3. Nájdite minimálnu hodnotu funkcie $x \mapsto \tan x + \cot x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
4. Ak existuje, nájdite minimálnu a maximálnu hodnotu funkcie $f = \pi x - \tan(\frac{\pi}{2}x)$ pre každý interval $(2n-1, 2n+1)$, pričom n je celé číslo.
5. S presnosťou na dve desatinné miesta vypočítajte najmenší kladný koreň rovnice $\tan x = x$. Ako veľa koreňov má táto rovnica?
6. Ako veľa koreňov má rovnica
$$i)\ \frac{3\tan 4x - 12\tan x}{3\tan 4x + 12\tan x} = 1; \quad ii)\ \sqrt[3]{\tan x} - 1 + \frac{1}{x} = \cot x\ ?$$
7. Dokážte, že

   i) $\tan(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in (-1, 1)$;

   ii) $\tan(\arccos x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ pre každé $x \in (0, 1)$;

   iii) $\tan(2\arcsin x) = 2x/\sqrt{1-x^2}/(1-2x^2)$ pre každé $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

   iv) $\tan(2\arccos x) = 2x/\sqrt{1-x^2}/(2x^2-1)$ pre každé $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

22.6 Funkcia arkustangens

Cvičenia 22.6

1. Vypočítajte deriváciu funkcie

   i) $\arctan(1/x)$;

   ii) $\arctan\big((x-1)/(x+1)\big)$;

   iii) $\arctan(x/\sqrt{1-x^2})$;

   iv) $\arctan(2\tan)$;

   v) $x^2/\arctan$;

   vi) $\arctan(x - \sqrt{1+x^2})$.

2. Vypočítajte

   i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\arctan\frac{x+1}{x+2} - \arctan\frac{x}{x+2}\right)$;

   ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$;

   iii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$;

   iv) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\arctan x}\right)$.

3. Dokážte, že funkcia
$$x \mapsto 2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2},\ x \in \langle 1, \infty)\ ,$$
je konštantná a nájdite jej hodnotu.

4. Nech $0 < b \le a$. Dokážte, že funkcia

$$x \mapsto \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos c} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right), \ x \in \langle 0, \pi)$$

je konštantná a nájdite jej hodnotu.

5. Dokážte, že

$$\tan(2 \arctan x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

pre každé $x \in (-1, 1)$. Čo sa stane, ak $x \notin (-1, 1)$?

6. Dokážte, že

$$\cos(2 \arctan x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

7. Dokážte, že

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

8. Dokážte, že

   i) $\arcsin(x/\sqrt{1+x^2}) = \arctan x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$;
   ii) $\arctan(x/\sqrt{1-x^2}) = \arcsin x$ pre každé $x \in (-1, 1)$;
   iii) $\arccos(1/\sqrt{1+x^2}) = \arctan x$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$;
   iv) $\arctan(\sqrt{1-x^2}/x) = \arccos x$ pre každé $x \in (0, 1)$.

9. Nájdite riešenie rovnice

   i) $\arctan x + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$;
   ii) $4 \arctan x - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$;
   iii) $\arctan 3x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.

10. Ak existuje, nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu funkcie

   i) $\arctan - \ln(1 + x^2)$;
   ii) $\arctan(1/(1 + x^2))$.

11. Dokážte, že $2x \arctan x \ge \ln(1 + x^2)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

12. Ako veľa koreňov má rovnica

$$\arctan \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1 + \exp(1/x)} = 0 \ ?$$

13. Dokážte, že, ak f je taká diferencovateľná funkcia, že

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

pre každé $x \in (-1, 1)$ a každé $y \in (-1, 1)$, potom existuje taká konštanta c, že $f(x) = c \arctan x$ pre každé $x \in (-1, 1)$. (Návod: Z podmienky $f'(x)(1 + x^2) = f'(y)(1 + y^2)$ pre každé $x,\ y \in (-1, 1)$ odvoďte, že existuje také c že, $f'(x) = c/(1 + x^2)$ pre každé $x \in (-1, 1)$.)

22.7 Výpočet čísla π

Cvičenia 22.7

1. Ako veľa koreňov má rovnica
$$\sin x = \frac{x}{100}\ ?$$

2. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n má rovnica
$$2x = (2n+1)(1-\cos x)$$
práve $2n+3$ koreňov.

3. Ako veľa koreňov má rovnica
$$\sin x = \log_{10} x\ ?$$

4. Ukážte, že
$$\text{i)}\ \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2; \quad \text{ii)}\ \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2\ .$$

5. Dokážte, že
$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}+2^{2n+1}}{(2n+1)\,6^{2n+1}}\ .$$
(Návod: $\pi/4 = \arctan 1 = \arctan(1/3) + \arctan(1/2)$.)

6. Dokážte, že
$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,3^n}\ .$$
(Návod: $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, teda $\pi/2\sqrt{3} = \sqrt{3}\arctan(1/\sqrt{3})$.)

7. Dokážte, že
$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,4^{2n}} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^{2n+1}}{(2n+1)\,9^{2n+1}}\ .$$
(Návod: $3\arctan(1/4) + \arctan(5/9) = \arctan 1$.)

22.8 Harmonický oscilátor

Cvičenia 22.8

1. Ak funkcia f spĺňa (**??**) pre každý bod x otvoreného intervalu I, potom je funkcia $\omega^2 f^2 + (\mathrm{D}f)^2$ konštantná v I. Dokážte to.

2. Nech funkcia f spĺňa (**??**) v otvorenom intervale I. Nech $x \in I$ a nech sú a a b definované podľa (**??**). Nech $g(y) = f(y) - a\cos(\omega\, y) - b\sin(\omega\, y)$ pre každé $y \in I$. Využijúc predchádzajúce cvičenie dokážte, že $g(y) = 0$ pre každé $y \in I$. Toto je iná možnosť dôkazu vety **??**.

3. Ešte ďalší dôkaz vety **??** je možné dostať napodobnením dôkazu vety 2.1.????? A to tak, že vezmeme $z \in I$ a $g(x) = \omega\, f(x)\cos(\omega(z - x)) + + \mathrm{D}f(x)\sin(\omega(z - x))$, a ukážeme platnosť $\mathrm{D}g(x) = 0$ pre každé $x \in I$.