21 | Exponenciálna funkcia

21.1 Definícia exponenciálnej funkcie

Cvičenia 21.1

1. Nájdite funkciu f, ktorá má taký mocninový rozvoj, že $\mathrm{D}f(x) = xf(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Poznamenajme, že všetky nepárne koeficienty mocninového rozvoja takej funkcie sa rovnajú nule.
2. Nájdite takú funkciu f, zapísanú ako súčet mocninovej postupnosti, že $\mathrm{D}f(x) = -xf(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.
3. Nájdite takú funkciu f vo forme súčtu mocninovej postupnosti, že $x\mathrm{D}f(x) = (x+1)f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

21.2 Vlastnosti exponenciálnej funkcie

Cvičenia 21.2

1. Vypočítajte
   i) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x)$;
   ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)}$;
   iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x}$;
   iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(\alpha x) - 1}{x}$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$;
   v) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1-\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}$;
   vi) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$;
   vii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\exp x - \mathrm{e}}{x-1}$;
   viii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \exp x - \mathrm{e}}{x^2-1}$.
2. Dokážte, že (**??**) platí pre každé $x \neq 0$.

3. Podľa (**??**) nerovnosť
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 < \exp x$$
platí pre každé $x > 0$. Dokážte, že nerovnosť
$$\exp x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$
platí pre každé $x < 0$.

4. Dokážte, že
$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 > (1 + x)\exp(-x)$$
pre každé $x > 0$. (Návod: Funkcia $1 - x^2/2 + x^3/3 - (1 + x)\exp(-x)$ je rastúca v $(0, \infty)$ a v 0 nadobúda hodnotu 0.)

5. Dokážte, že rovnica
$$x \exp x - 1 = 0$$
má jediný koreň, ktorý leží v intervale $(0, 1)$.

6. Nájdite maximálnu hodnotu funkcie: i) $x \exp(-x)$; ii) $x^2 \exp(-x)$.

7. Ukážte, že rovnosť
$$\lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$$
platí pre každé prirodzené číslo n. (Návod: Funkcia $f = x^n \exp(-x)$ je kladná v $(0, \infty)$ a klesajúca v (n, ∞), ako sa možno presvedčiť pomocou derivácií. Z toho vyplýva, že existuje $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = k$. Napokon $k = \lim\limits_{x\to\infty} (2x)^n \exp(-2x)$.)

8. Nech m je celé číslo a nech $f(x) = x^m \exp(-\sqrt{x})$ pre $x > 0$. Dokážte, že
$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{D}^n f(x) = 0$$
pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

9. Načrtnite graf funkcie

   i) $\frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)}$;

   ii) $\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$;

   iii) $x \exp(-x)$;

   iv) $x^2 \exp(-x)$;

   v) $x^3 \exp(-x)$;

   vi) $\frac{1}{1 - \exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}$;

   vii) $2\exp(-x) - \exp(-2x)$.

21.3 Logaritmická funkcia

Cvičenia 21.3

1. Vypočítajte derivácie funkcie

   i) $x\ln$;
   ii) $\ln^2$;
   iii) $1/\ln$;
   iv) $\ln/x^n$;
   v) $(1-\ln)(1+\ln)$;
   vi) $\ln(x^2-4x)$;
   vii) $\ln(\exp+\sqrt{1+\exp})$;
   viii) $\ln\left(\frac{x^2+\exp}{x+\exp}\right)$.

2. Vypočítajte

   i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$;
   ii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a},\ a>0$;
   iii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x+1)-\ln x)$;
   iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x},\ a>0$.

3. Dokážte, že platí

   i) $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$ pre $x\in(1,\infty)$;
   ii) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$ pre $x\in(0,\infty)$;
   iii) $x<-\ln(1-x)<\frac{x}{1-x}$ pre $x\in(0,1)$;
   iv) $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)$ pre $x\in(0,\infty)$;
   v) $4(x-1)-2\ln x<2x\ln x<x^2-1$ pre $x\in(1,\infty)$;
   vi) $\frac{x-1}{x}\le\ln x\le x-1$ pre $x\in(0,\infty)$ (rovnosť nastane len pre $x=1$);
   vii) $0<\frac{1}{x}-\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{2x^2}$ pre $x\in(0,\infty)$;
   viii) $\frac{2}{2x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{2x+1}{2x(x+1)}$ pre $x\in(0,\infty)$;
   ix) $2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)<\ln\frac{1+x}{1-x}$ pre $x\in(0,1)$.

21.4 Výpočet prirodzených logaritmov

Cvičenia 21.4

1. Vypočítajte $\ln 3$ s presnosťou na päť desatinných miest.

2. S presnosťou na päť desatinných miest vypočítajte $\ln k$ pre každé také celé číslo k, že $1\le k\le 10$.

3. Dokážte, že
$$\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
pre každé $x\in(-1,1)$.

4. Dokážte, že
$$\ln x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$
pre každé $x>0$. (Návod: $x=\bigl(1+(x-1)/(x+1)\bigr)/\bigl(1-(x-1)/(x+1)\bigr)$.)

5. Využite súčet z predchádzajúceho cvičenia a vypočítajte ln s presnosťou na tri desatinné miesta.

6. Dokážte, že
$$\ln\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^{2n+1}$$
pre každé $x>2$.

7. Ak $x>0$, potom
$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2n+1}.$$
Dokážte to.

21.5 Mocniny

Cvičenia 21.5

1. Ak m je celé číslo a n kladné celé číslo, potom $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$ pre $a>0$.

2. Vypočítajte $\sqrt{\mathrm{e}}$ s presnosťou na päť desatinných miest.

3. Vypočítajte $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$ s presnosťou na sedem desatinných miest.

4. Dokážte, že exponenciálna funkcia so základom $a>0$ je spojitá. Nájdite jej deriváciu.

5. Ukážte, že
   i) $\lim\limits_{x\to\infty}\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)^x=\mathrm{e}\,;$
   ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\bigl(1+\frac{a}{x}\bigr)^x=\exp a$ pre $a\in(-\infty,\infty)\,;$
   iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\bigl(1+\frac{1}{x+a}\bigr)^{x+b}=\mathrm{e}$ pre $a\in(-\infty,\infty)$ a $b\in(-\infty,\infty)\,;$
   iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\bigl(1+\frac{a}{x^2}\bigr)^{bx}=1$ pre $a\in(-\infty,\infty)$ a $b\in(-\infty,\infty)\,.$

6. Vypočítajte

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x^2+3}\right)^{(x^3-1)/(x^2-1)}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln(x^2/(1+x^2))\right)$.

7. Ak f je polynóm n-tého stupňa, potom má rovnica

$$\exp x - f(x) = 0$$

najviac $n+1$ koreňov. Dokážte to. (Návod: Použite dôkaz matematickou indukciou.)

8. Vypočítajte deriváciu funkcie

i) $x + x^x + x^{x^x}$;

ii) $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;

iii) $(1+x)^{1/x}$;

iv) $\frac{\exp(1+x^2)}{(1+x^2)^{\exp}}$.

21.6 Výpočet mocnín

Cvičenia 21.6

1. Nájdite metódu výpočtu

i) $\sqrt[3]{2}$;

ii) $\sqrt[4]{15}$;

iii) $\sqrt[5]{30}$;

iv) $\sqrt[4]{5}$.

Vypočítajte tieto čísla s presnosťou aspoň na štyri desatinné miesta.

2. Ukážte, že v intervale $-1, 1$ je funkcia

i) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$;

ii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$;

iii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

zhodná so súčtom mocninovej postupnosti. Nájdite túto mocninovú postupnosť.

3. Nech $a \neq 0$. Ukážte, že existuje také $\delta > 0$, že funkcia

i) $\sqrt{a^2+x^2}$;

ii) $\sqrt{a^2-x^2}$

je v intervale $(-\delta, \delta)$ rovná súčtu mocninovej postupnosti. Určte také maximálne δ a spomínanú mocninovú postupnosť.

21.7 Logaritmy s ľubovoľným základom

Cvičenia 21.7

1. Nájdite definičný obor funkcie

   i) $-\ln(1+5\sqrt{x})$;
   ii) $3-\sqrt{5+\log_1 0x}$.

   Ak je prostá v svojom definičnom obore, nájdite k nej inverznú funkciu (ako zvyčajne x predstavuje identickú funkciu v intervale $(-\infty,\infty)$).

2. Nájdite všetky také čísla x, že

   i) $\ln(x+1)=\ln(x-1)$;
   ii) $\ln(x+1)=1+\ln(x-1)$;
   iii) $\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})=1$;
   iv) $x^{\log_{10}x}=100$;
   v) $x^{\log_{10}x}+10^4x^{-\log_{10}x}=100\,001$;
   vi) $9^{\sqrt{x+1}}=27\cdot 3^{\sqrt{x+1}}$.

3. Ak $a>0,\ a\neq 0,\ b>0,\ b\neq 0$, potom

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

   pre každé $x>0$. Dokážte to.

4. Vypočítajte deriváciu funkcie

   i) $\exp_2$;
   ii) $(1-\exp_{10})/(1+\exp_{10})$;
   iii) $x/4^x$;
   iv) $\log_3(x^2-1)$;
   v) $\log_2(\log_3(\ln^5 x))$;
   vi) $\exp_2(x/\ln x)$;
   vii) $\ln(x+\log_{10}(x^2+1))$;
   viii) $(x+\exp x^2)/(x+\ln^2 x)$.

5. Ukážte, že

$$\lim_{t\to\infty} t(x^{1/t}-1)=\ln x$$

   platí pre každé $x\in(0,\infty)$.

6. Ukážte, že $\lim\limits_{x\to\infty} ?????^{1/x}=1$.

7. Ukážte, že

$$\lim_{t\to\infty}(1-\frac{x}{t}-\frac{x^2}{t^2})^t = ?????$$

   platí pre každé $x\in(-\infty,\infty)$.

21.8 Funkcionálna rovnica

Cvičenia 21.8

1. V roku 1970 malo isté mesto 25 000 obyvateľov. Do roku 1975 vzrástla populácia na 29 000. Aké množstvo obyvateľov mesta možno očakávať v roku 1990?

2. Za aký dlhý čas sa zdvojnásobí populácia, ak za rok vzrastie o 3 percentá?

3. V určitej bakteriálnej kultúre vzrastie množstvo baktérií ????? za 10 hodín. Ako dlho by to trvalo dvojnásobnému množstvu?

4. Polčas rozpadu rádioaktívneho materiálu je dĺžkou času potrebného na to, aby sa rozpadlo polovičné množstvo látky. Aký je logaritmický úbytok látky, ak jej polčas rozpadu je T?

5. Polčas rozpadu rádia je približne 1690 rokov. Koľko percent vzorky rádia ostane nerozpadnutej po 500 rokoch?

6. Nech $f(xy) = f(x) + f(y)$ pre každé $x \geq 0$ a $y \geq 0$ a nech je funkcia f uzavretá v okolí nejakého kladného čísla. Potom, alebo $f(x) = 0$ pre každé $x \geq 0$, alebo existuje také číslo $a > 0$, $a \neq 0$, že $f(x) = \log_a x$ pre každé $x \geq 0$. Dokážte to. (Návod: Nech $g(t) = f(\exp t)$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$. Potom $g(s+t) = g(s) + g(t)$ pre každé s a t.)

21.9 Diferenciálna rovnica

Cvičenia 21.9

1. Objekt s teplotou 63 °C je vložený do miestnosti s teplotou 21 °C. Po 10 minútach je teplota objektu 58 °C. Kedy bude jeho teplota 50 °C?

2. Horúci objekt je vložený do chladného vzduchu s teplotou 20 °C. Po 5 minútach je jeho teplota 200 °C. Po ďalších 5 minútach (teda spolu po 10 minútach od začiatku) je jeho teplota 160 °C. Aká bola počiatočná teplota objektu?

3. Kedy sa kapacita kondenzátora z príkladu **??** zmenší na $\frac{1}{2}Q$?

4. Motorový čln sa pohybuje v pokojnej vode rýchlosťou 10 km/h. Po vypnutí motora sa jeho rýchlosť za 20 sekúnd zmenší na 6 km/h. Predpokladajme, že celkový odpor vody a vzduchu voči člnu je úmerný jeho rýchlosti. Určte jeho rýchlosť po 2 minútach od vypnutia motora. Zistite aj vzdialenosť, ktorú čln prešiel za jednu minútu od vypnutia motora.

5. S rýchlosťou 200 m/s guľky kolmo vstupujú do dosky s hrúbkou 10 centimetrov a opúšťajú ju s rýchlosťou 80 m/s. Určte, ako dlho trvá guľke, kým prejde cez prekážku, ak je odpor dosky voči pohybu guľky úmerný druhej rýchlosti.

6. Cievka s indukčnosťou L henry je pripojená do série s rezistorom s odporom R ohmov. Vplyvom magnetického poľa je v obvode indukovaný prúd, pričom v čase $t = 0$ je prúd I ampérov. Aký bude prúd v čase $t \geq 0$?

7. Nech $C(t)$ označuje kapitál investovaný v hypotetickej banke v časovom okamihu t. Predpokladajme, že banka vyplatí p percent ročného podielu a podiel je hneď pripočítaný k ostatnému kapitálu (pri bežných účtoch sa tak zvyčajne deje každý deň). Nájdite vzťah, ktorý spĺňa funkcia C, ako aj príslušný vzorec.

8. Nech I a Y označujú funkcie reprezentujúce závislosť ročných štátnych investícií a národného dôchodku od času. Predpokladajme, že $I = a\,Y$, pričom $a > 0$ je konštanta (zlomok dôchodku je investovaný). Objem produkcie krajiny Q závisí od kapitálu K, pričom predpokladáme, že $Q = b\,K$ a $b > 0$ je konštanta. Q i K sa v čase menia. Keďže rýchlosť investovania je rovná rozsahu zmeny kapitálu, platí $\dot{K}(t) = I(t)$ pre každé t v časovom intervale J, počas ktorého sú predpoklady platné. V Domanovom modeli rastu sa predpokladá, že $Y = Q$, teda objem produkcie je rovný národnému dôchodku, čiže ponuka je rovná dopytu.