20 | Funkcionálne postupnosti

20.1 Sumovateľné postupnosti funkcií

Cvičenia 20.1

1. Nájdite definičný obor súčtu postupnosti funkcií

   a) $\{x^{n^2}\}_{n=0}^{\infty}$;
   b) $\{x^n/n^2\}_{n=1}^{\infty}$;
   c) $\{x^n/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$;
   d) $\{1/(1+x^n)\}_{n=0}^{\infty}$;
   e) $\{x^n/(1+x^{2n})\}_{n=0}^{\infty}$;
   f) $\{(x/(1+x))^n\}_{n=0}^{\infty}$;
   g) $\{x^n/(1+x^n)^2\}_{n=0}^{\infty}$;
   h) $\{x^{2n}/(1+x^{4n})\}_{n=0}^{\infty}$;
   i) $\{nx^n\}_{n=1}^{\infty}$;
   j) $\{n^2x^n\}_{n=1}^{\infty}$;
   k) $\{n^3x^n\}_{n=1}^{\infty}$;
   l) $\{n((x+1)/(2x-1))^n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Nájdite súčet postupnosti funkcií

   a) $\{3^nx^n\}_{n=0}^{\infty}$;
   b) $\{x^{2n}/(1+x^2)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$;
   c) $\{nx^n\}_{n=0}^{\infty}$;
   d) $\{x^n(1-x^n)\}_{n=0}^{\infty}$;
   e) $\{x^n(1-nx^n)\}_{n=0}^{\infty}$;
   f) $\{n^2x^n\}_{n=0}^{\infty}$.

3. Ukážte, že postupnosť funkcií $\{n^{-2}(1+n^2x^2)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je normálne sumovateľná v intervale $(-\infty,\infty)$.

4. Ukážte, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$$

pre každé $x \in \langle 0, \infty)$ a každé $n = 1, 2, 3, \ldots$, je normálne sumovateľná v $\langle 0, \infty)$

5. Ak φ je ľubovoľná funkcia na množine M, potom funkcionálna postupnosť $\{(n^2 + \varphi^2)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je normálne sumovateľná v M.

6. Ukážte, že definičným oborom súčtu postupností funkcií $\{x^n(1 - x^n)\}_{n=0}^{\infty}$ je interval $\langle -1, 1\rangle$, ale táto postupnosť nie je normálne sumovateľná v tomto intervale. (Návod: Ak $|x^n(1 - x^n)| \leq b_n$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$, potom $b_n \geq 1$.)

7. Zistite, či je v $(-\infty, \infty)$ normálne sumovateľná funkcionálna postupnosť

   a) $\{1/(x^2 + n^2)\}_{n=1}^{\infty}$;

   b) $\{(nx - [nx])/n^2\}_{n=1}^{\infty}$;

   c) $\{x/(|x| + n^2)\}_{n=1}^{\infty}$;

   d) $\{1/(1 + (x - n)^2)\}_{n=0}^{\infty}$.

8. Dokážte, že ak každá funkcia f_n, $n = p, p + 1, p + 2, \ldots$ je monotónna v intervale $\langle a, b\rangle$, a ak postupnosti $\{f_n(a)\}_{n=p}^{\infty}$ a $\{f_n(b)\}_{n=p}^{\infty}$ sú sumovateľné, potom funkcionálna postupnosť $\{f_n\}_{n=p}^{\infty}$ je normálne sumovateľná v $\langle a, b\rangle$.

9. Ak funkcionálna postupnosť $\{f_n\}_{n=p}^{\infty}$ je normálne sumovateľná a funkcionálna postupnosť $\{g_n\}_{n=p}^{\infty}$ ohraničená v množine M, potom funkcionálna postupnosť $\{f_n g_n\}_{n=p}^{\infty}$ je normálne sumovateľná v množine M.

20.2 Spojitosť

Cvičenia 20.2

1. Nech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

pre každé $x \in (-1, 1)$. Ukážte, že funkcia f je spojitá v každom bode intervalu $(-1, 1)$.

2. Nech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Ukážte, že funkcia f je spojitá v každom bode intervalu $(-\infty, \infty)$.

3. Nech
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$$
pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a každé $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ukážte, že definičným oborom súčtu
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$
funkcionálnej postupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je interval $(-\infty, \infty)$. Potom si všimnite, že $\max\{|f_n(x)| : x \in (-\infty, \infty)\} = 1$ pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$, takže postupnosť nie je normálne sumovateľná v intervale $(-\infty, \infty)$. No jednako dokážte, že funkcia f je spojitá v $(-\infty, \infty)$. (Návod: Načrtnite grafy niekoľkých funkcií f_0, f_1, f_2, ... Všimnite si, že postuposť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je normálne sumovateľná v okolí každého čísla.)

4. Nech je ω kladné číslo. Ukážte, že ak platí
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+n\omega)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n\omega)^2}$$
pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, potom f je spojitá v $(-\infty, \infty)$ a $f(x+\omega) = f(x-\omega) = f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

20.3 Diferencovateľnosť

Cvičenia 20.3

1. Nech
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Dokážte, že funkcia $\mathrm{D}f(x) = f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Nech
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
pre každé $x \in (-1, 1)$. Ukážte, že funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu $(-1, 1)$ a $\mathrm{D}f(x) = (1+x^2)^{-1}$ pre každé $x \in (-1, 1)$.

3. Nech
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{a} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Najprv ukážte, že funkcie f a g sú určite definované v intervale $(-\infty, \infty)$. Potom dokážte, že $\mathrm{D}f(x) = g(x)$ a $\mathrm{D}g(x) = -f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.

4. Nech $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ a
$$a_n = \frac{2n-3}{(n-1)n}\, a_{n-2}$$
pre každé $n = 2, 3, \ldots$ Nech
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Dokážte, že $\mathrm{D}^2 f(x) - 2x\mathrm{D}f(x) - f(x) = 0$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. (Návod: Všimnite si, že $a_{2m} = 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4m-3)/(2m)!$ pre $m = 0, 1, 2, \ldots$)

5. Nech $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ a
$$a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n+2)}$$
pre $n = 3, 4, \ldots$ Nech
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Dokážte, že $x\mathrm{D}^2 f(x) + 3\mathrm{D}f(x) - x^2 f(x) = 0$ pre každé $x \in (-1, 1)$.

20.4 Mocninové postupnosti

Cvičenia 20.4

1. Aký je polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti
   i) $\{3^n x^n\}_{n=0}^{\infty}$;
   ii) $\{3^{-n} x^n\}_{n=0}^{\infty}$;
   iii) $\{r^n x^n\}_{n=0}^{\infty}$, pričom $r > 0$?

2. Dokážte, že ak polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti $\{a_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ρ a $r > 0$, potom polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti $\{a_n r^n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ρ/r. Ako sa zmení výsledok, ak $\rho = \infty$?

3. Aký je polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti $\{n x^n\}_{n=0}^{\infty}$?

4. Aký je polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti $\{(2^n + 3^n) x^n\}_{n=0}^{\infty}$?

5. Dokážte, že polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti $\{a_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je suprémom všetkých takých čísel t, že postupnosť $\{a_n t^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená.

20.5 Diferencovateľnosť mocninových postupností

Cvičenia 20.5

1. Vypočítajte nasledujúce súčty

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$;

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

iv) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}$;

v) $\sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k}(n-j)\right) \frac{1}{2^n}$;

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2^n}$;

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(2n+1)}{4^n}$;

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$;

ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(2n-1)}{2^n}$.

2. Mocninové postupnosti $\{a_n\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n\, a_n\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n^2\, a_n\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$, ... majú rovnaký polomer sumovateľnosti. Dokážte to.

3. Aký je polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti

i) $\{n\, 3^n\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$;

ii) $\{n(n+1)^{-1}\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$;

iii) $\{n^3\, 2^n\, x^n\}_{n=0}^{\infty}$?

.

20.6 Koeficienty mocninového rozvoja

Cvičenia 20.6

1. Určte deriváciu rádu 173 v bode 0 funkcie

i) $\frac{1}{1-x^2}$;

ii) $\frac{1}{x+2}$;

iii) $\frac{3x-2}{x-1}$;

iv) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$;

v) $\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$;

vi) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

2. Určte funkciu f, ak je v otvorenom intervale obsahujúcom 0 rovná súčtu mocninovej postupnosti a platí $f(0) = 0$ a $\mathrm{D}^n f(0) = (n+1)!\, 3^{-n}$ pre každé $n = 1, 2, \ldots$

3. Ak $u \neq 0$, dokážte, že rovnosť

$$\frac{1}{(u-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{u^{n+2}}$$

platí pre každé $x \in (-|u|, |u|)$.

4. Dokážte, že ak f je rovná súčtu mocninovej postupnosti a pre nejaké prirodzené číslo k je postupnosť $\{\mathrm{D}^n f(0)/n^k\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom je polomer sumovateľnosti mocninovej postupnosti rovný ∞.

5. Dokážte, že ak f je taká funkcia, že $\mathrm{D}^n f(0) = (n!)^2$ pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$, potom nemôže byť f rovná súčtu mocninovej postupnosti v intervale $(-\delta, \delta)$, pričom $\delta > 0$.

20.7 Rekurencie

Cvičenia 20.7

1. Vypočítajte súčet (**??**) pre každé x v okolí 0 a nájdite rozvoj pre členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak

   i) $a_0 = 1,\ a_1 = 0;\ a_n = \frac{3}{2}\,a_{n-1} - \frac{1}{2}\,a_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots$
   ii) $a_0 = 1,\ a_1 = 1;\ a_n = a_{n-2} - \frac{8}{3}\,a_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots$
   iii) $a_0 = 1,\ a_1 = 0;\ a_n = \frac{2}{3}\,a_{n-1} - \frac{1}{3}\,a_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots$
   iv) $a_0 = 1,\ a_1 = 2;\ a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots$
   v) $a_0 = 1,\ a_1 = 0;\ a_n = \frac{2}{3}\,a_{n-1} - \frac{1}{9}\,a_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots$

2. Vypočítajte
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{3^n}\ ,$$
ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosťou z predchádzajúceho cvičenia iii).

3. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosťou Fibonacciho čísel určených podmienkami $a_0 = a_1 = 1$ a $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ pre každé $k = 2, 3, 4, \ldots$. Nájdite všeobecný vzorec pre $a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

4. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosťou Fibonacciho čísel. Vypočítajte súčty
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{3^n}\ .$$
Ukážte, že postupnosť $\{2^n a_n/3^n\}_{n=0}^{\infty}$ nie je sumovateľná.

5. Nech $a_0 = 2$ a $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ pre každé $n \geq 1$. Ukážte, že
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{2}{(1-x)}$$
pre x v okolí 0, a teda $a_n = n(n-1) + 2$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots$

6. Nech $a_0 = 13/6,\ a_1 = 35/36,\ a_2 = 125/108$ a $a_n = -(5/6)\,a_{n-1} + (1/3)\,a_{n-2} + (1/6)\,a_{n-3}$ pre $n \geq 3$. Dokážte, že existuje také $\delta > 0$, že platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{13 - 5x - 2x^2}{6 + 5x - 2x^2 - x^3}$$
pre každé $x \in (-\delta, \delta)$. Nájdite vzorec pre členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. (Návod: $(13 - 5x - 2x^2)/(6 + 5x - 2x^2 - x^3) = 1/(2-x) + 2/(3+x) + 1/(1+x)$ pre každé $x \neq 2,\ -3,\ -1$.)