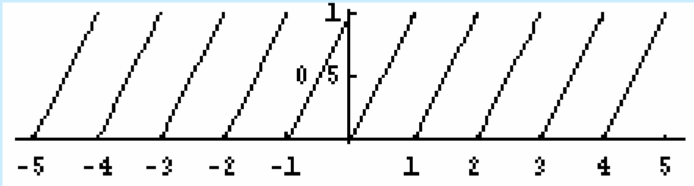
24. Limita postupnosti

Priklad 1 : Nech $f(x) = x - [x]$, pre každé $x \in (-\infty,\infty)$. Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.



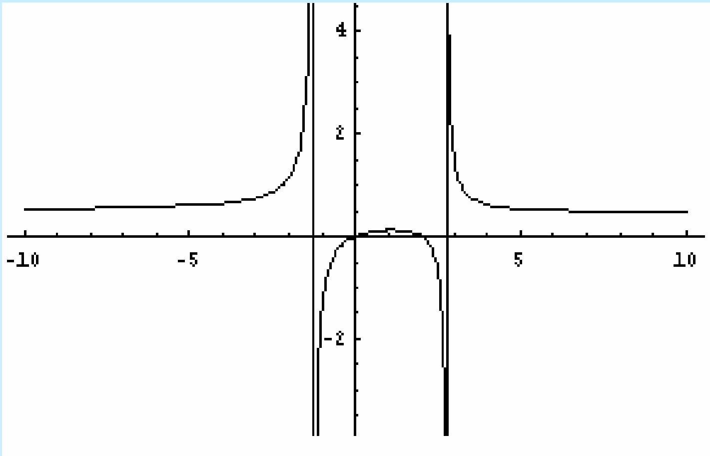
Definícia 24.1 :

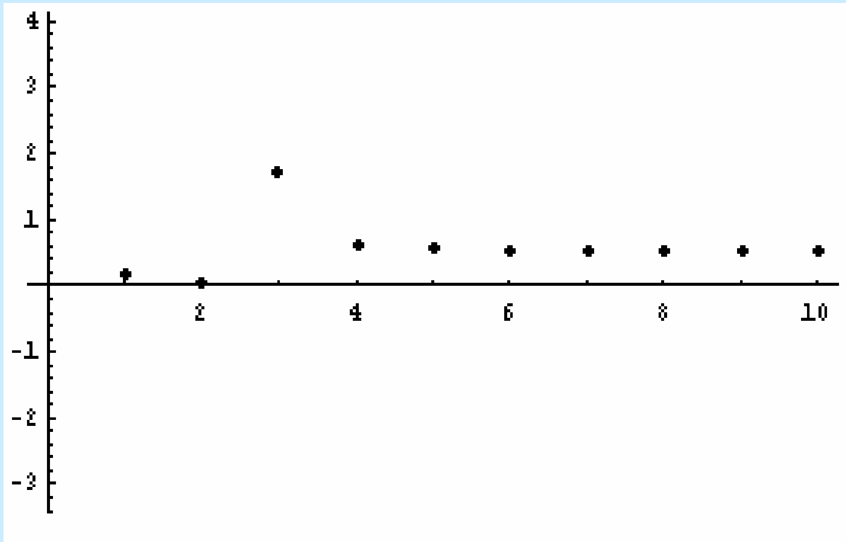
Nech p je celé číslo a nech pre každé celé číslo $n \geq p$ budú a_n reálne čísla. Nech k bude reálne číslo, potom k je nazývaná limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$, existuje reálne číslo c, že $|a_n - k| < \varepsilon$, pre každé celé číslo $n > c$ píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$. Takú postupnosť nazývame konvergentná

Veta 24.1 :

Nech k je lim v ∞ funkcie f. Nech p je celé číslo a nech $a_n = f(n)$, pre každé celé číslo $n \geq p$. Potom k je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$.

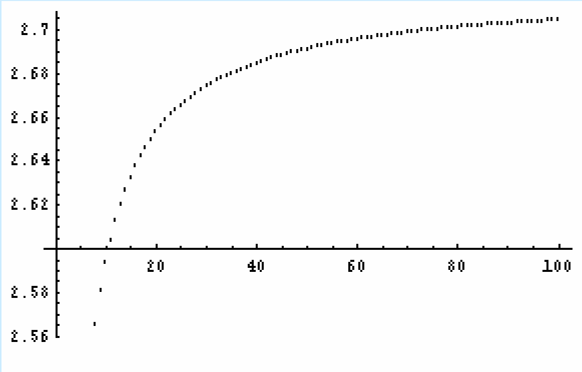
Priklad 2 : Vypočítajte limitu postupnosti $\left\{ \dfrac{n^2+2n}{2n^2-3n-7} \right\}_{n=0}^{\infty}$.

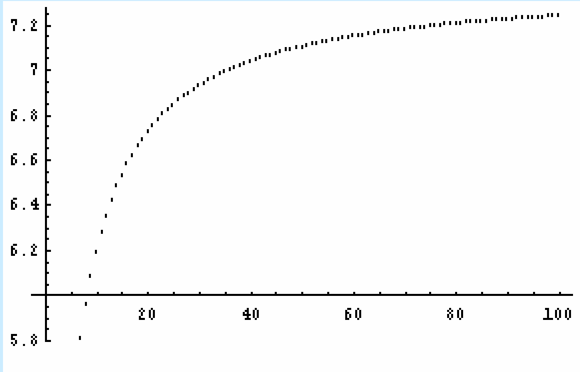


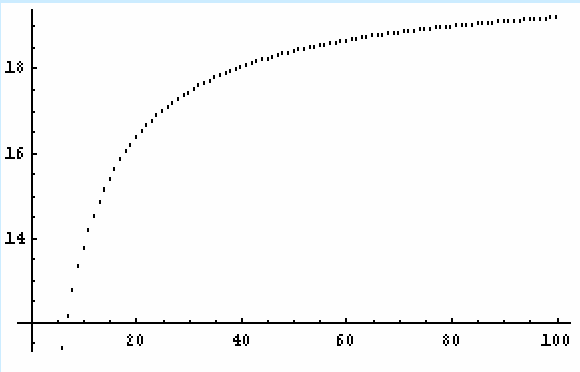


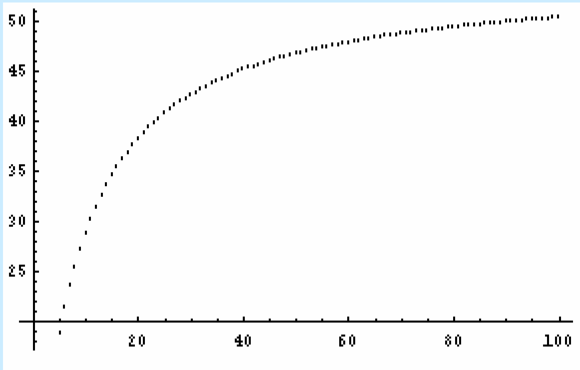
Priklad 3 : Nech α je reálne číslo p najmenšie prirodzené číslo väčšie ako -α (lebo $1+\frac{\alpha}{n}>0$) a nech $a_n=\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, pre $n\geq p$.

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$.



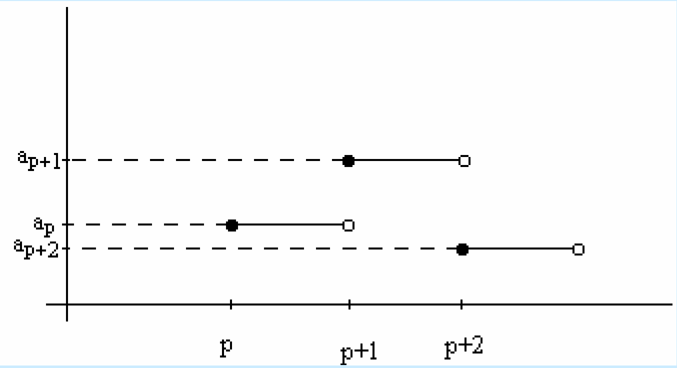






Definícia 24.2 :

Nech p je celé číslo a pre každé celé číslo $n \geq p$*, nech* a_n *sú reálne čísla. Nech* $f(x) = a_{[x]}$*, pre každé* $x \in \langle p, \infty)$*. Potom funkcia f sa nazýva schodkovitá funkcia vzťahujúca sa (súvisiaca) na postupnosť* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *alebo jednoducho schodkovitá funkcia postupnosti* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$.



Veta 24.2 :

Nech f je schodkovitá funkcia prináležiaca postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$. *Potom postupnosť* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *konvergentná práve vtedy, keď funkcia f má limitu v* ∞. *Naviac, ak postupnosť* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná, potom táto limita je rovná limite funkcie f v bode* ∞

Veta 24.3 :

Nech p,q a r sú celé čísla také, že $r \geq p$ *a* $r \geq q$. *Pre každé celé číslo* $n \geq p$ *je* a_n *číslo a tiež pre každé celé číslo* $n \geq q$ *je* b_n *číslo.*
Nech $a_n = b_n$, *pre každé celé číslo* $n \geq r$. *Potom ak jedna z postupností* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=q}^{\infty}$ *je konvergentná potom tiež konvergentná a obe postupnosti majú rovnaké limity.*

Veta 24.4 :

Konvergentné postupnosti sú ohraničené.

Veta 24.5 :

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = l$ *potom*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = k + l \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = k - l$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = kl \qquad \text{ak } k\neq 0 \text{ potom } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{l}{k}$$

Veta 24.6 :

Nech k je reálne číslo a nech g je spojitá funkcia v bode k. Nech $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná postupnosť, ktorej limita je rovná k.*

Potom $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(k)$

Priklad 4 : *Vypočítajte limitu* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(n+1)!}{2(n+1)!+(n-1)!}}$

Veta 24.7 :

Nech p je celé číslo a_n, b_n *sú reálne čísla také, že* $a_n \leq b_n$, *pre každé* $n\geq p$ *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = l$, *potom* $k \leq l$.

Veta 24.8 :

Nech p je celé číslo a_n, b_n, c_n sú reálne čísla také, že $a_n \leq b_n \leq c_n$, pre každé $n \geq p$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = k = \lim_{n\to\infty} c_n$ *potom* $\lim_{n\to\infty} b_n = k$.

Priklad 5 : *Ukážte, že pre každé reálne číslo x platí* $\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{x} = x$

Priklad 6 : *Ukážte, že* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Veta 24.9 :

Ak $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná postupnosť taká, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a postupnosť* $\{b_n\}_{n=q}^{\infty}$ *je ohraničená, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Veta 24.10 :

Každá ohraničená monotónna postupnosť je konvergentná

Veta 24.11 :

Nech $\{s_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je neklesajúca postupnosť reálnych čísel. Nech* $a_p = s_p$ *a* $a_n = s_n - s_{n-1}$ *pre každé* $n>p$. *Potom postupnosť* $\{s_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná práve vtedy, keď rad* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *je konvergentný.*

Ak postupnosť $\{s_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná potom* $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=p}^{\infty} a_n$.

Priklad 7 : *Vypočítajte* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+2n^3+3n^2+2n+2}$

Veta 24.12 :

Každá vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ *je konvergentná a má tú istú limitu ako* $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$

Veta 24.13 :

Každá ohraničená postupnosť má konvergentnú vybranú postupnosť