23. Goniometrické funkcie

Funkcia arkuskosínus a arkussínus

Veta 23.1 :

a) Definičný obor oboch funkcií arccos, arcsin, je interval $\langle -1,1\rangle$ a obor hodnôt funkcií je$\{\arccos x : x\in\langle -1,1\rangle\} = \langle 0,\pi\rangle$; $\{\arcsin x : x\in\langle -1,1\rangle\} = \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$

b) Platí

$$\arccos(-1)=\pi \qquad \arcsin(-1)=-\tfrac{\pi}{2}$$
$$\arccos(0)=\tfrac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0)=0$$
$$\arccos(1)=0 \qquad \arcsin(1)=\tfrac{\pi}{2}$$

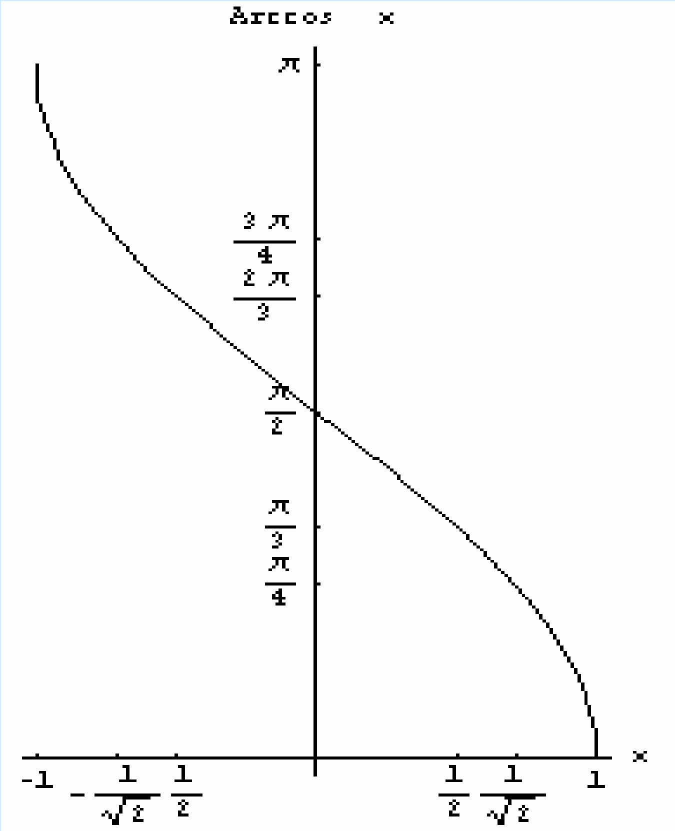
c) Platí rovnosť $\arccos x+\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$ pre každé $x\in\langle -1,1\rangle$

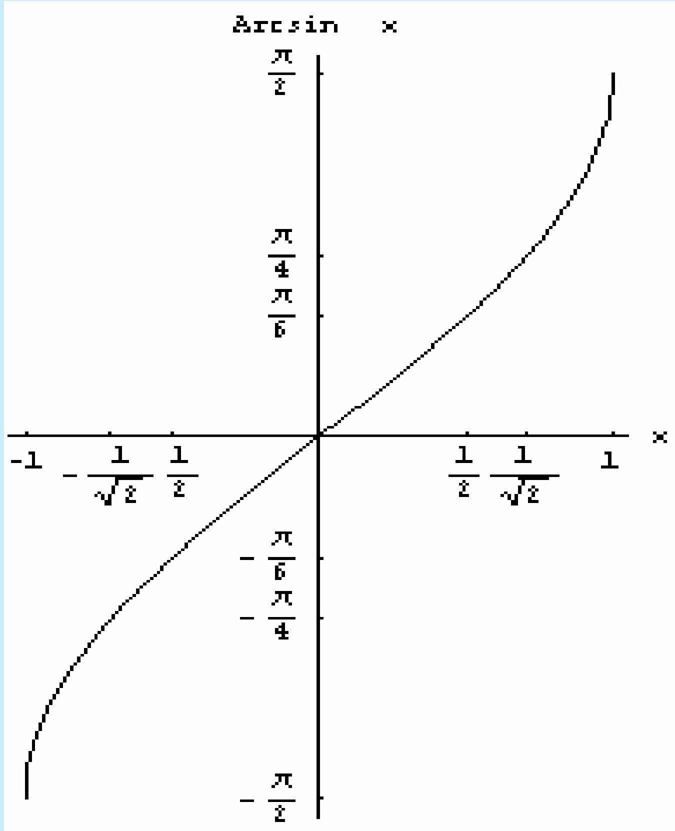
d) Funkcia arccos je klesajúca a arcsin rastúca na intervale $\langle -1,1\rangle$

e) Obe funkcie arccos a arcsin sú spojité na intervale $\langle -1,1\rangle$ a diferencovateľné v každom bode intervalu$\langle -1,1\rangle$a platí :

$$D(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{pre každé } x\in(-1,\ 1)$$

f) Rovnica $\arcsin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}\dfrac{1}{2k+1}x^{2k+1}$, pre $x\in(-1,\ 1)$


Arccos x
π
3 π / 4
2 π / 3
π / 2
π / 3
π / 4
x
-1
- 1 / √2
1 / 2
1 / 2
1 / √2
1


Arcsin x
π / 2
π / 4
π / 6
x
-1
- 1 / √2
1 / 2
1 / 2
1 / √2
1
- π / 6
- π / 4
- π / 2

Funkcia arkustangens

Veta 23.2 :

a) Definičný obor funkcie arctg x je interval (-∞,∞) a obor hodnôt
{tg x: x∈ (-∞,∞)}= $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

b) Platí :

$\operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

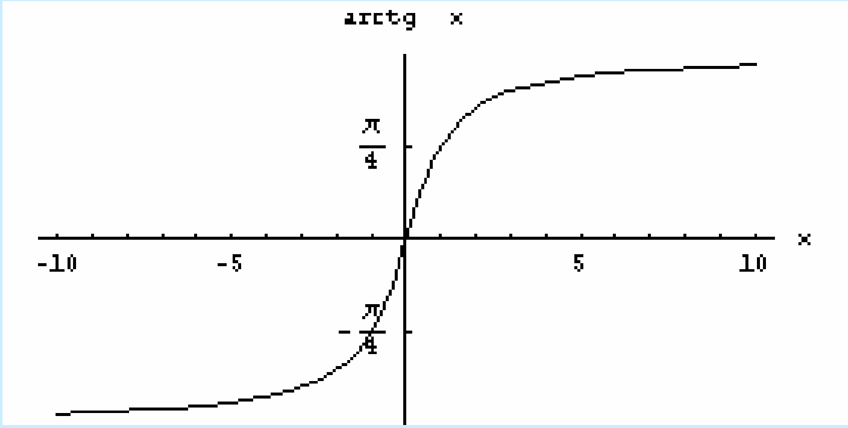
c) Ak x > 0 potom $0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ a
ak x < 0 potom $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 0$

d) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, pre každé x∈ (-∞,∞)

e) Ak x a y sú čísla také , že x y< 1 potom $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$

f) Funkcia arkustangens je diferencovateľná na intervale (-∞,∞) a
$D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, pre každé x∈ (-∞,∞)

g) Platí $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, pre každé x∈ (-1,1)



$$\pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,5^{2n+1}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,239^{2n+1}}$$

Pre prvých 8 členov prvého súčtu a prvé 2 členy druhého súčtu dostaneme chybu menšiu ako 62.10^{-12} a π=3,14159265358979323846264 3…