22. Goniometrické funkcie

Funkcia kosínus a sínus

Nájdite funkciu f takú, že $D^2 f(x) = -f(x)$, pre každé $x \in (-\infty, \infty)$

$$D^2 f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \text{, pre každé } x \in (-\delta, \delta)$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a \quad \text{a} \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b, \quad \text{pre každé } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

V prípade, že $a=1$, $b=0$ dostaneme funkciu kosínus, ktorá je definovaná pre každé $x \in (-\infty, \infty)$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{teda} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Veta 22.1 :

Ak f a g sú také funkcie že, $D^2 f(x) = -f(x)$

$D^2 g(x) = -g(x)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ potom

$f(0)\, Dg(x+y) + D f(0)\, g(x+y) = f(x)\,.\, Dg(y) + Df(x)\, g(y)$

pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a pre každé $y \in (-\infty, \infty)$.

Veta 22.2 :

Nech f je funkcia taká, že $D^2 f(x) = -f(x)$, pre každé $x \in (-\infty, \infty)$,
potom $f(x) = f(0) \cos x + Df(0) \sin x$, pre každé $x \in (-\infty, \infty)$

Veta 22.3 :

Množina $\{x\colon\ x > 0,\ \ \cos x = 0\}$ kladných koreňov funkcie kosínus je neprázdna a má najmenší prvok.

Veta 22.4 :

a) $\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$D \cos x = -\sin x$ $\quad$ $D \sin x = \cos x$

$D^2 \cos x = -\cos x$ $\quad$ $D^2 \sin x = -\sin x$ $\quad$ Pre každé $x \in (-\infty,\infty)$

b) Rovnica

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1,$$ platí pre každé $x \in (-\infty, \infty)$

c) Rovnice

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y,$$ platia pre každé $x \in (-\infty,\infty)$, pre každé $y \in (-\infty,\infty)$

d) Rovnice

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \quad \sin(x+\pi) = -\sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

platia pre každé $x \in (-\infty, \infty)$

e) Rovnice

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

platia pre každé $x \in (-\infty,\infty)$ a pre každé $k \in Z$

f) Rovnice

$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin(k\pi) = 0,$$ platia pre každé $k \in Z$

Veta 22.4 (pokračovanie):

g) Funkcia kosínus má

kladné hodnoty na intervale $\left((4k-1)\frac{\pi}{2},(4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ a

záporné hodnoty na intervale $\left((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ pre každé $k\in Z$

funkia sínus má

kladné hodnoty na intervale $\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right)$ a

záporné hodnoty na intervale $\left((2k+1)\pi,(2k+2)\pi\right)$, pre každé $k\in Z$

h) Funkcia kosínus je

rastúca na intervale $\left((2k+1)\pi,(2k+2)\pi\right)$ a

klesajúca na intervale $\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right)$, pre každé $k\in Z$

funkcia sínus je

rastúca na intervale $\left((4k-1)\frac{\pi}{2},(4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ a

klesajúca na intervale $\left((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, pre každé $k\in Z$

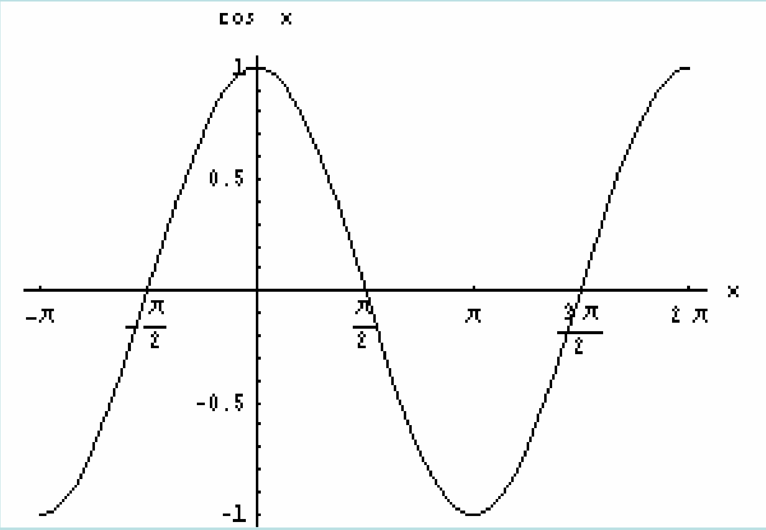
i) Obe funkcie kosínus a sínus sú ohraničené na (-∞,∞)

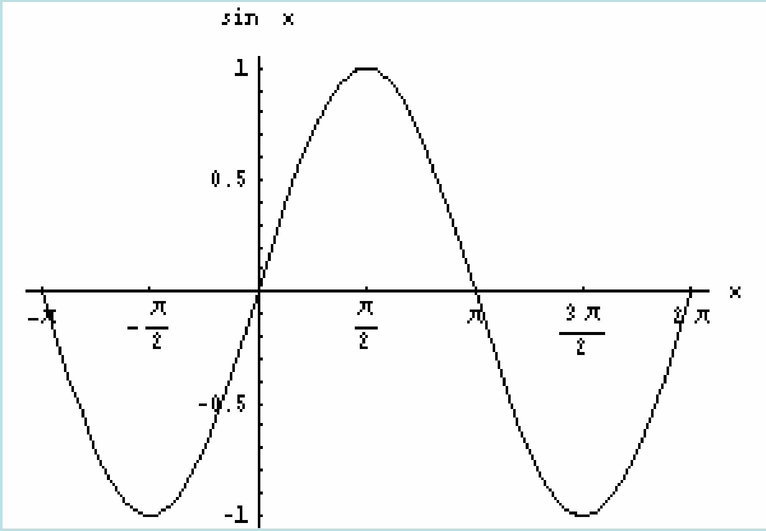
$|\cos x|\le 1$ $\quad|\sin x|\le 1$ platí pre každé $x\in(-\infty,\infty)$

Veta 22.4 (pokračovanie):

j) Ak neexistuje $k \in Z$ také , že $x = k\pi$ potom $|\cos x| < 1$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$, pre každé $k \in Z$

Ak neexistuje $k \in Z$ také , že $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ potom $|\sin x| < 1$ a $\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^k$, pre každé $k \in Z$





Veta 22.5 :

a) Definičný obor funkcie tg je množina všetkých reálnych čísel okrem $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pre ľubovoľné $k\in$ Z

b) Platí : $\operatorname{tg} 0=0 \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

c) Ak $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, potom tg $x<0$, ak $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, potom tg $x>0$

d) Obor hodnôt $\{\operatorname{tg} x\colon x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\}=(-\infty,\infty)$

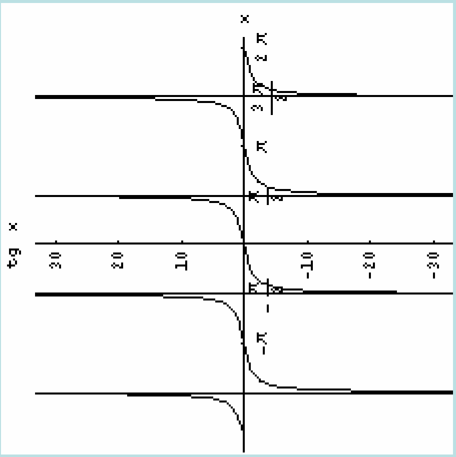
e) Platí $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}(x)$, pre každé x z definičného oboru

$\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}(x)$, pre každé x z definičného oboru

f) Ak čísla x, y, $x+y$, nie sú nepárne násobky $\frac{\pi}{2}$ (aby cos x, cos y, cos(x+y), boli rôzne od 0)

potom $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$

g) Funkcia tg je diferencovateľná a $D(\operatorname{tg}(x))=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ v každom bode definičného oboru


tg x
x
30
20
10
-10
-20
-30