21. Prirodzene logaritmická funkcia

Veta 21.1 :

a) Definičný obor ln x je $(0,\infty)$ a $\{\ln x : x\in(0,\infty)\} = (-\infty,\infty)$

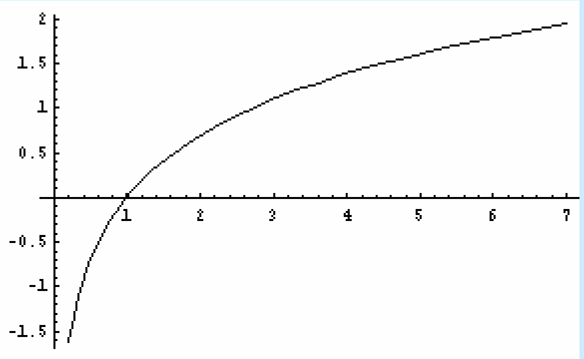
b) Rovnosť $\exp(\ln x) = x$ platí pre každé $x\in(0,\infty)$
a rovnosť $\ln(\exp(x)) = x$ platí pre každé $\forall\, x\in(-\infty,\infty)$

c) Platí $\ln 1 = 0$ a $\ln e = 1$

d) rovnosti $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ a $\ln(y/x)= \ln y - \ln x$ platia pre $\forall\, x\in(0,\infty)$ a pre $\forall\, y\in(0,\infty)$

e) funkcia ln je diferencovateľná v každom kladnom čísle a
D $\ln(x) = 1/x$, pre $x>0$

f) Výraz $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ platí pre každé $x\in(-1,1)$.



Priklad 3 : Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x a ak $f(x) > 0$ potom funkcia

$\ln(f(x))$ je diferencovateľná v bode x a $D\left(\ln f(x)\right) = \dfrac{Df(x)}{f(x)}$

Priklad 4 : Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^5}{5} \dots = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

vezmeme si ľub. $k > 0$ $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{k+1}{k}$ z toho $x = \dfrac{1}{2k+1}$ teda $x \in (0,1)$ a teda

$\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = 2\left(\dfrac{1}{1(2k+1)} + \dfrac{1}{3(2k+1)} + \dfrac{1}{5(2k+1)^2} + \dots\right)$, ak pripočítame $\ln k$ k obom

stranám dostaneme $\ln(k+1) = \ln k + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$

týmto spôsobom môžeme rekurentne vypočítať ľubovoľný prirodzený logaritmus.

Priklad 5 : Ukážte $\ln(2) = 0 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}} \doteq 0{,}69314$

Exponenciálna funkcia

Veta 21.1 :

a) Nech $a>0$ potom $\ln(a^x) = x.\ln a$ pre ľubovoľné číslo x

b) Platí $(a^x)^y = a^{xy}$

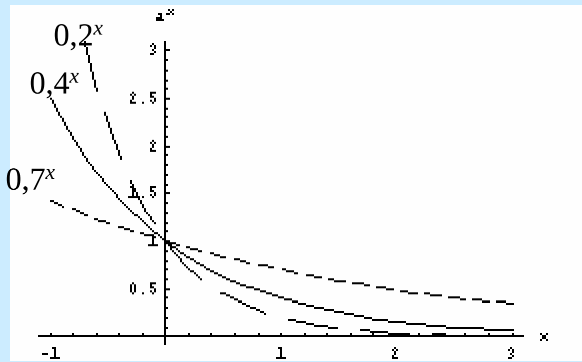
$a^x.a^y = a^{x+y}$

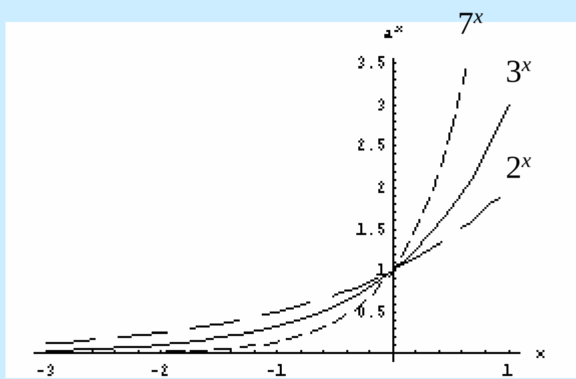
$\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x}$ pre ľubovoľné číslo x,y

c) Platí $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, pre ľubovoľné $n \in \mathrm{N}$

d) Ak $a > 0$ a $b > 0$ potom $(a.b)^x = a^x.b^x$

e) Platí $\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$ pre ľubovoľné x





Priklad 1 : Vypočítajte: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

Priklad 2 : Nech $\alpha \in R$ a nech $f(x) = x^{\alpha}$ pre ľubovoľné. $x > 0$ ak funkcia f je diferencovateľná v ľubovoľnom čísle a

$Df(x) = \alpha .\ x^{\alpha-1}$ pre každé $x>0$

Priklad 3 : Ak funkcie f a g sú diferencovateľné v bode x a $g(x) > 0$ potom funkcia $h = g^f$ je tiež diferencovateľná v bode x a

$\mathrm{D}h(x) = (\mathrm{D}f(x)\ .\ \ln g(x) + f(x)\ .g^{-1}(x)\ .\mathrm{D}g(x)).\ g(x)^{f(x)}$

Veta 21.2 :

Nech $\alpha \in (-\infty,\infty)$. Potom pre každé $x \in (-1,1)$ je rad $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ konvergentný

a $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.

Priklad 4 : Vypočítajte $\sqrt{2}$.

Logaritmická funkcia

Veta 21.3 :

a) Definičný obor funkcie $\log_a x$ je množina $(0, \infty)$ všetkých kladných čísel a, obor hodnôt $\{\log_a x : x \in (0, \infty)\} = (-\infty, \infty)$

b) Rovnosť $a^{\log_a x} = x$ platí pre $x \in (0, \infty)$

rovnosť $\log_a a^x = x$ platí pre $x \in (-\infty, \infty)$

c) Platí $\log_a 1 = 0$ a $\log_a a = 1$.

d) Rovnosť $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ platí pre $\forall\, x > 0$

e) Rovnosť $\log_a (x\, y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$$

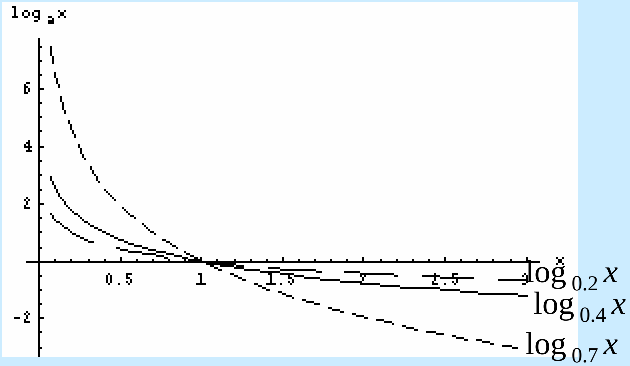
$$\log_a y^x = x \log_a y \quad \text{pre } \forall\, x > 0 \text{ a } y > 0$$

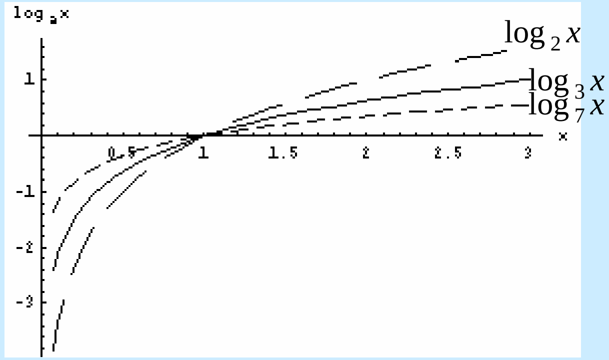
f) Funkcia $\log_a x$ je diferencovateľná v každom kladnom čísle a

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{pre každé } x > 0$$

g) Ak $0 < a < 1$ potom funkcia $\log_a x$ je klesajúca na $(0, \infty)$

$a > 1$ potom funkcia $\log_a x$ je rastúca na $(0, \infty)$


$\log_a x$
6
4
2
-2
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
$\log_{0.2} x$
$\log_{0.4} x$
$\log_{0.7} x$


$\log_a x$
1
-1
-2
-3
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
$\log_2 x$
$\log_3 x$
$\log_7 x$