20.Mocninné rady

Diferencovateľnosť mocninných radov

Veta 20.1 :

Nech ρ - polomer konvergencie mocninného radu s koeficientmi a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a nech σ je polomer konvergencie mocninných radov s koeficientmi $b_n = (n+1)a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, potom $\sigma = \rho$.

Veta 20.2 :

Nech $0 < \delta$. Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentný pre $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$. A nech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pre $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$. Potom funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu $(-\delta, \delta)$ a $Df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, pre $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$

Priklad 1 : Vypočítajte súčet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Veta 20.3 :

Nech $\delta > 0$. Nech a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sú také čísla, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentný pre $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$. Nech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pre $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$. Potom v každom bode intervalu $(-\delta, \delta)$ funkcie f majú deriváciu každého radu a $D^k f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k}$ pre $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$ a $\forall\ k = 0, 1, 2, \dots$

a naviac $a_n = \frac{1}{n!} D^n f(0)$ pre $\forall\ n = 0, 1, 2, \dots$

Veta 20.4 :

Nech a_n a b_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sú také čísla, že pre nejaké $\delta > 0$ rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sú konvergentné a rovnosť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pre $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$. Potom $a_n = b_n$ pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$

Priklad 2 : Rozviňte do mocninného radu pre $\alpha \neq 0$ a $f(x) = \dfrac{1}{\alpha - x}$, pre $\forall\ \alpha \neq x$.

Prirodzene exponenciálna funkcia

D$f(x) = f(x)$ pre každé x z otvoreného intervalu I

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f(x) = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \text{ pre každé } x \in (-\delta, \delta)$$

v prípade , že $a = 1$ funkcia f nazývaná exponenciálna funkcia alebo presnejšie prirodzene exponenciálna funkcia označovaná exp(x) alebo e^x. teda

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \text{ pre každé } x \in (-\infty, \infty)$$

$$\text{alebo } \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Veta 20.5 :

Nech f je funkcia taká, že $Df(x) = f(x)$ pre $\forall\, x \in (-\infty,\infty)$, potom $f(x).\, f(y) = f(0)\, .f(x+y)$ pre každé x a y.

Veta 20.6 :

Nech f je funkcia taká, že $Df(x) = f(x)$ potom $f(x) = f(0)\exp(x)$, pre každé $x \in (-\infty,\infty)$.

Veta 20.7 :

a) Prirodzene exponenciálna funkcia je jediná funkcia na intervale $(-\infty,\infty)$, ktorá je rovná svojej derivácii a hodnota v bode 0 je rovná 1.

b) Platia rovnosti:

$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$ pre každé $x,y \in (-\infty,\infty)$

$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$

c) Každá hodnota exponenciálnej funkcie je kladné číslo t.j. $\exp(x)>0$ pre každé x a naopak ku každému kladnému číslu $y>0$ $\exists\, x \in (-\infty,\infty)$ také, že $\exp(x) = y$, t.j. $\{\exp(x) : x \in (-\infty,\infty)\} = (0,\infty)$

d) Prirodzene exponenciálna funkcia je rastúca na $(-\infty,\infty)$

e) Limita funkcie exp v bode $-\infty$ je 0. $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0\right)$ a limita v ∞ je nevlastná $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty\right)$.

Inverzná funkcie k funkcii exp(x) je nazývaná prirodzený logaritmus a označuje ln x