19.Funkcionálne rady

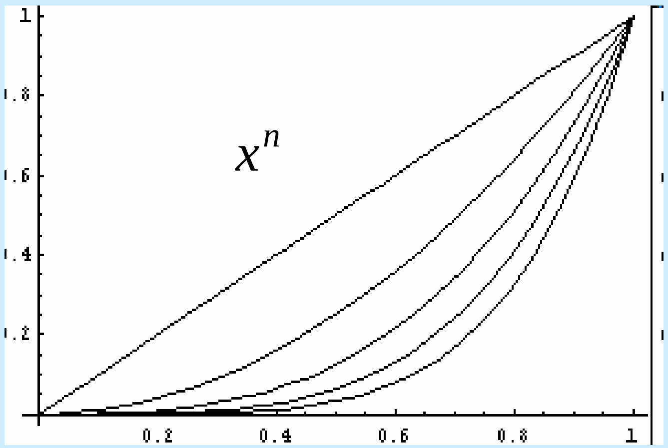
Definícia 19.1 :

Funkciu f nazveme súčtom členov postupnosti funkcie $\{f_n\}_{n=p}^{\infty}$, ak:

a) definičným oborom funkcie f je množina M (obor konvergencie) všetkých bodov patriacich do oborov definície všetkých funkcií f_n, $n = p$, $p+1$, … taká, že číselný rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentný

b) platí rovnosť $f(x) = \sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$ pre každé $x \in$ M

Priklad 1 : Nech $f_n(x) = x^n$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$, pre $\forall$ $n = 0, 1, 2$ …



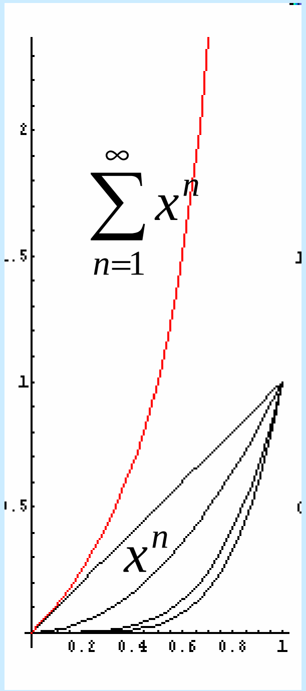
Definícia 19.2 :

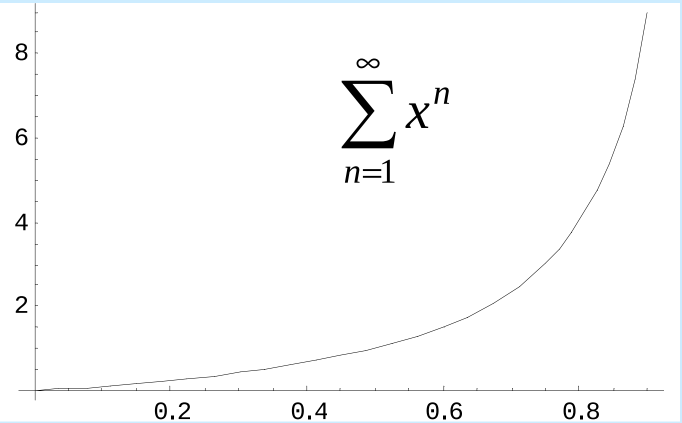
Funkcionálny rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ sa nazýva rovnomerne konvergentný na množine M, ak existujú čísla v_n, $n=p,p+1,\ldots$ také, že

$$|f_n(x)| \leq v_n \text{ pre} \forall x \in \mathrm{M} \text{ a pre } \forall n = p,p+1,\ldots.$$

a rad $\sum_{n=p}^{\infty} v_n$ je konvergentný.

Priklad 2 : Nech $f_n(x) = x^n$ pre každé $x \in (0,1)$, pre $\forall$ $n=0,1,2\ldots$





Veta 19.1 :

Ak funkcionálny rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ je rovnomerne konvergentný na množine M,

potom pre $\forall\ x \in$ M číselný rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$ je konvergentná.

Veta 19.2 :

Nech funkcie f_n , $n= p,p+1,\ldots$ sú spojité (zľava spojité, sprava spojité)

v bode a. Nech funcionálny rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ je rovnomerne konvergentný v okolí

(v ľavom okolí, resp. pravom okolí) bodu a, potom súčet členov postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=p}^{\infty}$ je funkcia f , ktorá je spojitá (zľava spojitá, sprava spojitá) v bode a.

Priklad 3 : Nech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pre $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Ukážte, že funkcia f je spojitá v bode $a \in (-\infty,\infty)$

Priklad 4 : Nech $f_n(x)=\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)^n$ pre $\forall x\in$ (-∞,∞) a $\forall n$ = ,1,2,3… . Ukážte, že funkcia f nie je spojitá v bode 0

Veta 19.3 :

Nech f_n , n=,1,2,3…..sú také, postupnosti funkcií, že $\{\mathrm{D}\, f_n\}_{n=p}^{\infty}$ sú ich derivácie. Funkcionálny rad $\sum_{n=p}^{\infty}\mathrm{D}\, f_n$ je rovnomerne konvergentný na otvorenom intervale I. Pre aspoň jeden bod $c\in\mathrm{I}$ je číselný rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(c)$ konvergentný. Potom pre $\forall\ x\in\mathrm{I}$ je číselný rad $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$ konvergentný a naviac ak $f(x)=\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$, pre $\forall x\in\mathrm{I}$, potom funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu I a $\mathrm{D}f(x)=\sum_{n=p}^{\infty}\mathrm{D}f_n(x)$, pre $\forall\ x\in\mathrm{I}$

Mocninné rady

Definícia 19.3 :

Nech a_n, $n \in 1,2,3\ldots$ sú čísla. Funkcionálny rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nazveme mocninný rad s koeficientmi a_n, $n = 0,1,2,3\ldots$

Nech T je množina všetkých čísel $t \geq 0$ takých, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ je konvergentný.

Potom množinu $T = \{\ t\text{: } t \geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n < \infty\}$ nazveme obor konvergencie.

$\rho = \sup T$ nazveme polomer konvergencie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(Pretože $0 \in T$ potom $T \neq 0$ a musí tam existovať suprémum množiny T.)

Priklad 5 : Určte polomer konvergencie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Priklad 6 : Určte polomer konvergencie mocninného radu s koeficientmi $a_n = n!$

Veta 19.4 :

Nech ρ je polomer konvergencie mocninného radu s koeficientmi a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

a) ak $0 < c < \rho$, potom mocninná postupnosť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je rovnomerne sumovateľná na intervale $\langle -c, c \rangle$

b) pre $\forall\, x \in (-\rho, \rho)$ číselný rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentný

c) ak x je číslo také , že $|x| > \rho$ potom postupnosť $\{a_n x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je neohraničená, teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nie je konvergentný

Priklad 7 : Ak a_n=1 pre n= 0,1,2… , potom ρ =1 a rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentný iba pre $x \in (-1,1)$